Terminales ES-L Problèmes sur les suites

Problème 1 : Une entreprise du secteur « bâtiments et travaux publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2010, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité de déchets rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets rejetés pour l'année $(2010+n)$. On a donc $r_0=40000$.

1) a) Calculer r_1 et r_2 .
b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $r_{n+1}=0{,}95r_n+200$

2) Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n=r_n-4000$.
a) Démontrer que la suite (s_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Pour tout entier naturel n, exprimer s_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $r_n=36000\times 0{,}95^n+4000$.
c) La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier.
d) Déterminer la limite de la suite (r_n) .
e) Calculer une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2015.

3) À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement ?

Problème 2 : Dans un village, l'association de gymnastique comptait 50 adhérents en 2006.
Depuis cette date, la trésorière a remarqué que, chaque année, elle reçoit 18 nouvelles adhésions, et que 85 % des anciens inscrits renouvellent leur adhésion.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $(2006+n)$.
On a donc $a_0=50$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}85a_n+18$.

1) Soit la suite u_n définie pour tout entier naturel n par $u_n=a_n-120$.
a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n=120-70\times 0{,}85^n$
c) Étudier le sens de variations de la suite (a_n) .
d) Montrer que, pour $n\geqslant 20$, $117\leqslant a_n<120$. Interpréter ce résultat.

2) Chaque année, 60 % des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique hebdomadaire et 40 % pour deux heures de gymnastique hebdomadaire.
a) Exprimer en fonction de n le nombre d'heures de gymnastique hebdomadaire à prévoir pour l'an $2006+n$.
b) Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes. On veut déterminer à partir de quelle année l'association devra prévoir plus de 8 séances par semaine. Démontrer qu'alors, n doit vérifier l'inéquation $98\times 0{,}85^n<8$. Résoudre cette inéquation (à l'aide de la calculatrice, de la fonction TABLE par exemple) et conclure.

Problème 3 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}85u_n+1{,}8$.

1) Sur une feuille de papier millimétré, construire un repère orthonormé (unité 1 cm) où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.
a) Dans ce repère, tracez les droites d'équations respectives : $y=0{,}85x+1{,}8$ et $y=x$.
b) Dans ce repère, placez u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 , u_2 et u_3 . On laissera apparents les traits de construction.
c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n) .

2) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-12$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=12-4\times 0{,}85^n$.
c) Étudier le sens de variations de la suite (v_n) , puis celui de la suite (u_n) .
d) Déterminer la limite de la suite (u_n)
e) Montrer que pour $n>8$, on a $10<u_n<12$.

3) Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :

- Il y a 1800 nouveaux abonnés chaque année.
- D'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2010, il y avait 8000 abonnés.

a) Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n), où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2010+n)$.

b) En utilisant la question 2) b), calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2020.

Problème 4 : (France métropolitaine, septembre 2012)

Pour jouer sur internet à un certain jeu la souscription d'un abonnement annuel est obligatoire.
À partir d'un sondage, on prévoit que :
– 80 % des abonnés renouvellent chaque année leur abonnement,
– le nombre de nouveaux abonnés sera de 20 000 tous les ans.

1) Au premier janvier 2012, on comptait 50 000 abonnés à ce jeu en ligne.
Selon ce modèle, justifier qu'au premier janvier 2013 le nombre d'abonnés sera égal à 60 000.

2) a) Justifier que le nombre d'abonnés au premier janvier de l'année 2012+n est modélisé par la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 50000 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 0{,}8\, a_n + 20000 \end{cases}$$

b) Calculer a_2 et a_3.

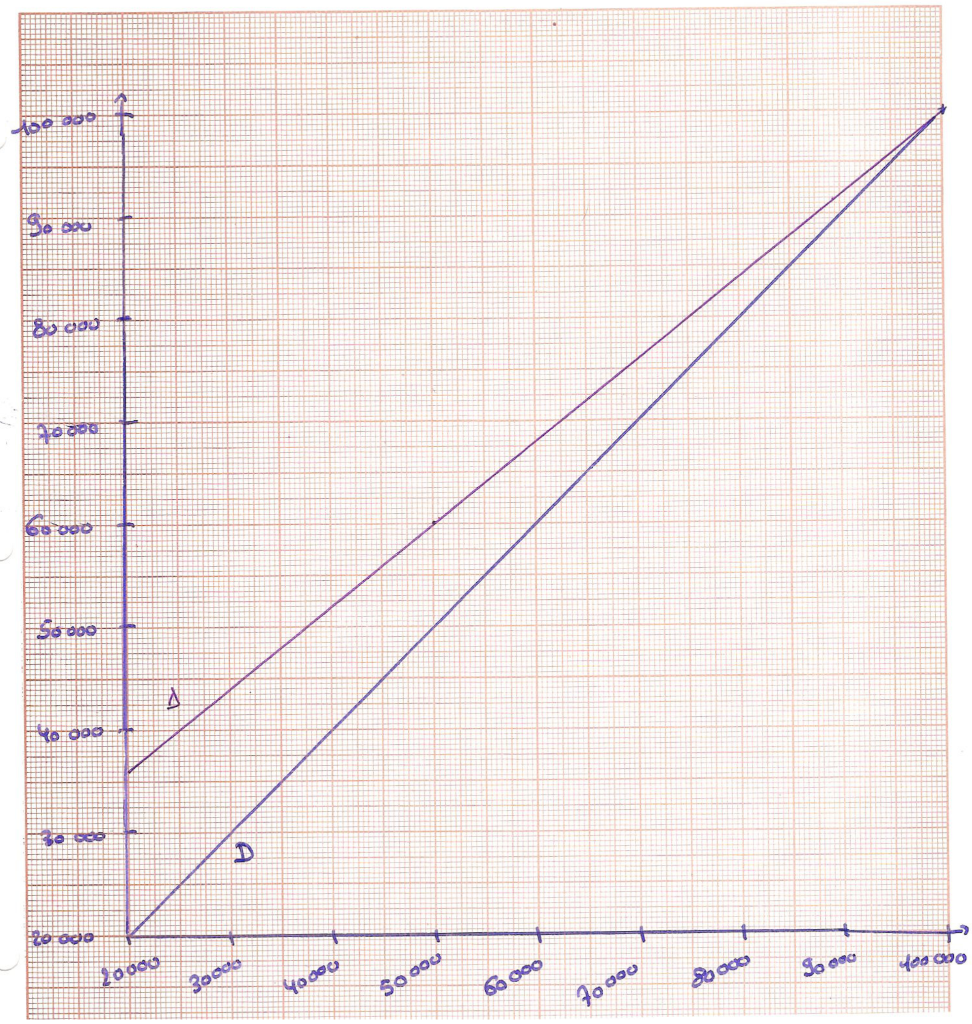
c) Sur le graphique ci-contre, à rendre avec la copie, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les droites D d'équation $y = x$ et Δ d'équation $y = 0{,}8x + 20000$
Sur l'axe des abscisses, représenter a_0 puis construire a_1, a_2, a_3, a_4 en utilisant les représentations graphiques des deux droites précédentes. Laisser apparents les traits de construction.

d) En s'appuyant sur une observation graphique, émettre une conjecture sur la limite de la suite (a_n).

3) On admet que pour tout nombre entier naturel n,
$a_n = 100000 - 50000 \times 0{,}8^n$.

a) Déterminer la limite de la suite (a_n).

b) Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
En utilisant ce modèle, donner une estimation de l'année à partir de laquelle, au premier janvier, le nombre d'abonnés à ce jeu sera supérieur à 95 000.



Problème 5 (France métropolitaine, septembre 2011) :

La société « Vélibre », spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs. Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

- De racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année.
- De revendre 20 % des vélos en janvier 2011 et en janvier 2012.

- De revendre 20 % au moins des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante.

1) Pour tout nombre entier naturel n, on modélise le nombre approximatif des vélos du parc en janvier de l'année 2010+n par les termes de la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$u_{n+1}=0{,}8\,u_n+40 \text{ et } u_0=150 .$$

Vérifier que u_1 et u_2 correspondent bien au nombre prévu de vélos du parc en janvier 2011 et janvier 2012.

2) Pour connaître l'évolution du nombre approximatif de vélos du parc, le directeur utilise un tableur.
Voici ci-contre un extrait de sa feuille de calcul :
a) Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n).
b) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

	A	B	C	D	E
1	Valeur de n	Valeur de un		Valeur de n	Valeur de un
2	0	150		18	199,10
3	1	160		19	199,28
4	2	168		20	199,42
5	3	174,40		21	199,54
6	4	179,52		22	199,63
7	5	183,62		23	199,70
8	6	186,89		24	199,76
9	7	189,51		25	199,81
10	8	191,61		26	199,85
11	9	193,29		27	199,88
12	10	194,63		28	199,90
13	11	195,71		29	199,92
14	12	196,56		30	199,94

3) Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n=u_n-200$.

a) Prouver que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8. Déterminer son premier terme.

b) En déduire, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction du nombre entier n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n=10\times0{,}8^n$

e) En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La municipalité prévoit d'implanter de nouvelles bornes dans la ville afin d'offrir aux usagers 250 emplacements. La société « Vélibre » pourra-t-elle satisfaire cette demande ? Argumenter la réponse.

Problème 6 : Partie A : situation théorique.

On considère la suite (v_n) définie sur ℕ par $v_0=1000$ et pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=v_n\times1{,}005+30$.
On donne l'algorithme ci-contre.

Entrées : N et S sont deux nombres entiers.
Traitement : Pour K allant de 1 à N, affecter à S la valeur $S\times1{,}005$. FinPour.
Afficher : S

1) Calculer v_1 et donner la valeur de v_4 arrondie au millième près.

2) Faire fonctionner l'algorithme ci-dessus pour S=1000 et N=4. Donner, dans un tableau, les résultats obtenus au fur et à mesure pour S, suivant la valeur de K. Que permet d'obtenir cet algorithme ?

3) Transformer l'algorithme proposé pour qu'il affiche en sortie finale la valeur v_4, pour $S=1000$ et $N=4$.

Partie B : situation pratique.

On place 1 000 € sur un compte qui rapporte 0,5 % par mois à intérêts composés. Ainsi, chaque mois, les intérêts s'ajoutent au capital. Chaque mois, on verse 30 € de plus et on ne peut plus rien retirer pendant 5 ans.

1) a) Vérifier que, à la fin du premier mois, le capital acquis est 1 035 €.
b) Calculer le capital acquis à la fin du deuxième mois.

2) Donner l'algorithme qui permet d'afficher en sortie finale le capital sur ce livret à la fin de l'année de placement.