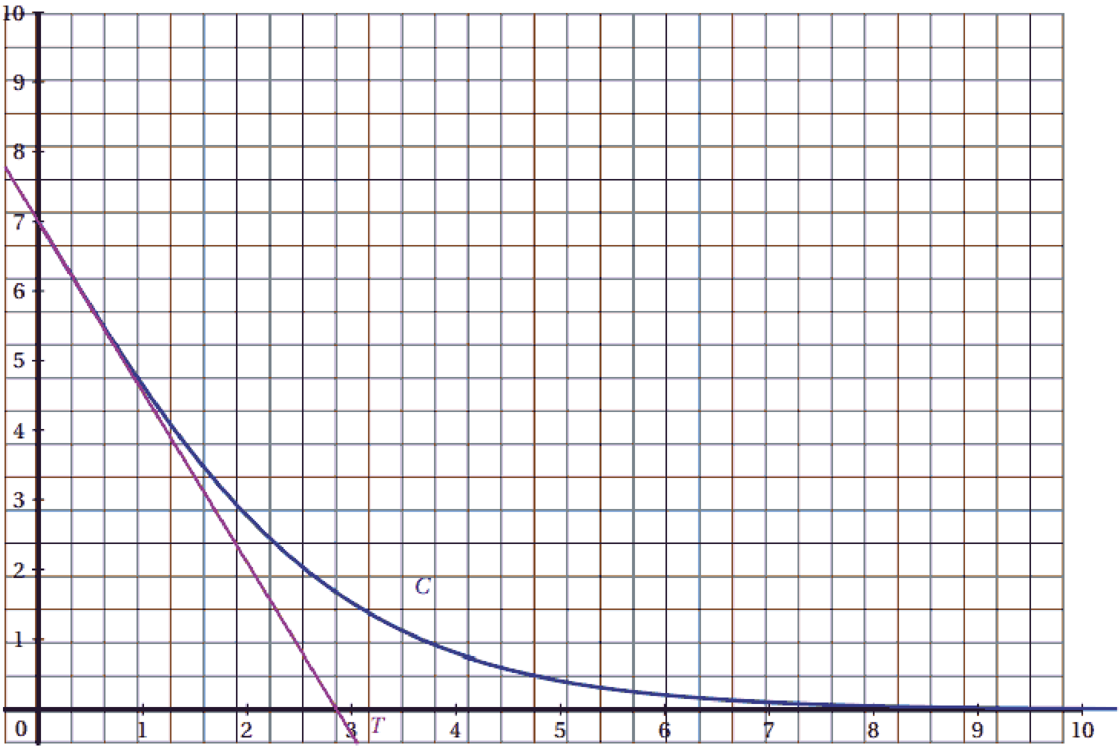
Énoncé :



Exercice 1 : on a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction g définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ ainsi que la tangente (T) à cette courbe en son point de coordonnées $(0;7)$. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

Partie A

1) Préciser la valeur du réel $g(0)$.

2) On admet que la tangente (T) passe par le point de coordonnées $(4;-2,8)$. Justifier que la valeur exacte de $g'(0)$ est $-2,45$.

3) On admet que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{a}{e^{bx}+1}$ où a et b sont des nombres réels.

a) Démontrer que pour tout réel x de $[0;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{-ab\,e^{bx}}{(e^{bx}+1)^2}$.

b) En utilisant les résultats des questions 1) et 2), déterminer les valeurs des réels a et b.

Partie B

On considère un objet manufacturé dont le prix unitaire est x, en centaines d'euros. D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ pour cet objet, en centaines d'unités, sont définies pour tout x positif ou nul par : $f(x)=e^{0,7x}-1$ et $g(x)=\dfrac{14}{e^{0,7x}+1}$.

1) Si le prix de vente unitaire de l'objet est 300 €, combien d'objets (à l'unité près) les consommateurs sont-ils prêts à acheter ? 0,5 pt

2) Calculer le prix de vente unitaire de l'objet, arrondi à l'euro près, pour que la demande soit de 350 objets. 1 pt

3) a) Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x)=g(x)$, et donner une valeur approchée au centième près de cette solution.

On appelle « prix d'équilibre » le prix permettant l'égalité entre l'offre et la demande. Quel est le prix d'équilibre, arrondi à l'euro près ? 1 pt

b) Au prix d'équilibre, quelle est la valeur commune de l'offre et de la demande, arrondie à l'unité près ? Quel est le chiffre d'affaire généré par les ventes au prix d'équilibre ? 1 pt

Corrigé

Partie A

1) L'énoncé nous parle du point de coordonnées $(0;7)$ de la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction g. C'est donc que $\boxed{g(0)=7}$.

2) On sait donc que (T) passe par le point de coordonnées $(0;7)$ (nommons A ce point) et le point de coordonnées $(4;-2{,}8)$ (nommons B ce point).

Le coefficient directeur de (T) est donc $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2{,}8-7}{4-0}=\dfrac{-9{,}8}{4}=-2{,}45$.

Comme (T) est la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0, $\boxed{g'(0)=-2{,}45}$.

3) a) g est définie sur $[0;+\infty[$ par $\boxed{g(x)=\dfrac{a}{e^{bx}+1}}$.

On remarque que le dénominateur de $g(x)$ ne s'annule jamais car, pour tout réels x et b, $e^{bx}>0$ donc $e^{bx+1}>1$. g est le quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $[0;+\infty[$, son dénominateur ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$, donc g est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$g(x)$ est de la forme $a\times\dfrac{1}{v(x)}$ avec $\boxed{v(x)=e^{bx}+1}$ et $\boxed{v'(x)=b\times e^{bx}}$.

Donc pour tout x de $[0;+\infty[$, $g'(x)=a\times\dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}=a\times\dfrac{-b\times e^{bx}}{(e^{bx}+1)^2}$, soit $\boxed{g'(x)=\dfrac{-ab\times e^{bx}}{(e^{bx}+1)^2}}$.

b) On admet donc que $g(0)=7$ et $g'(0)=-2{,}45$.

$$g(0)=7 \Leftrightarrow \frac{a}{e^{b\times 0}+1}=7 \Leftrightarrow \frac{a}{2}=7 \Leftrightarrow \boxed{a=14}.$$

En prenant 14 comme valeur pour a , on traduit la seconde hypothèse :

$$g'(0)=-2{,}45 \Leftrightarrow \frac{-14be^{b\times 0}}{(e^{b\times 0}+1)^2}=-\frac{49}{20} \Leftrightarrow \frac{14b}{(1+1)^2}=\frac{49}{20} \Leftrightarrow \frac{14b}{4}=\frac{49}{20} \Leftrightarrow \frac{2\times 7\times b}{4}=\frac{7\times 7}{4\times 5} \Leftrightarrow 2b=\frac{7}{5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b=\frac{7}{10}} \text{ ou } \boxed{b=0{,}7}.$$

Partie B

Pour tout x de $[0;+\infty[$, $\boxed{f(x)=e^{0{,}7x}-1}$ et $\boxed{g(x)=\dfrac{14}{e^{0{,}7x}+1}}$.

1) Si le prix de vente unitaire de l'objet est de 300 €, on a $x=3$.

$g(3)=\dfrac{14}{e^{0{,}7\times 3}+1}=\dfrac{14}{e^{2{,}1}+1}$ $\quad g(3)\approx 1{,}53$. Donc les acheteurs sont prêts à acheter **153** objets.

2) Pour que la demande soit de 350 objets, on doit avoir $\boxed{g(x)=3{,}5}$.

$$g(x)=3{,}5 \Leftrightarrow \frac{14}{e^{0{,}7x}+1}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{e^{0{,}7x}+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4=e^{0{,}7x}+1 \Leftrightarrow \boxed{e^{0{,}7x}=3}.$$

Si on ne connaît pas encore la fonction logarithme népérien, on fait faire un tableau de valeurs à la calculatrice.

On trouve $e^{0,7\times 1,569}<3<e^{0,7\times 1,57}$ donc une[1] solution x telle que $1,569<x<1,57$.
Un arrondi de la solution x de l'équation est donc $1,57$.
Le prix de vente à fixer pour que la demande soit de 350 objets est d'environ 157 €.

Si on connaît la fonction logarithme népérien, on résout dans $[0;+\infty[$ l'équation $e^{0,7x}=3$:
$e^{0,7x}=3 \Leftrightarrow \ln(e^{0,7x})=\ln(3) \Leftrightarrow 0,7x=\ln(3) \Leftrightarrow \frac{7}{10}x=\ln(3) \Leftrightarrow x=\frac{10\ln 3}{7}$ et $\frac{10\ln 3}{7}\approx 1,57$.
On retrouve bien le résultat ci-dessus.

3) a) $\boxed{f(x)=g(x)} \Leftrightarrow e^{0,7x}-1=\frac{14}{e^{0,7x}+1} \Leftrightarrow (e^{0,7x}-1)(e^{0,7x}+1)=14 \Leftrightarrow (e^{0,7x})^2-1=14 \Leftrightarrow \boxed{e^{1,4x}=15}$

Si on ne connaît pas encore la fonction logarithme népérien, on fait faire un tableau de valeurs à la calculatrice.
On trouve : $e^{1,4\times 1,934}<15<e^{1,4\times 1,935}$. Donc une[2] solution x de cette équation est telle que $1,934<x<1,935$.
Donc une valeur arrondie à 10^{-2} près de cette solution est $1,93$. Le prix d'équilibre est donc d'environ 193 €.

Si on connaît le logarithme : $e^{1,4x}=15 \Leftrightarrow \ln(e^{1,4x})=\ln(13) \Leftrightarrow 1,4x=\ln(15) \Leftrightarrow \frac{7}{5}x=\ln(15)$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\ln 15}{7} \text{ avec } \frac{5\ln 15}{7}\approx 1,93 .$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

b) Pour connaître la valeur commune de l'offre et de la demande au prix d'équilibre, il faut calculer $f(prix\,d'équilibre)$ ou $g(prix\,d'équilibre)$.

Il faut normalement procéder avec la valeur exacte du prix d'équilibre : $\frac{5\ln 15}{7}$, mais il faut connaître pour cela le logarithme népérien : $f\left(\frac{5\ln 15}{7}\right)=e^{0,7\times\frac{5\ln 15}{7}}-1 = e^{0,5\ln 15}-1 = e^{\ln(15^{0,5})}-1 = \boxed{\sqrt{15}-1}$ $\sqrt{15}-1\approx 2,87$.

La valeur commune de l'offre et de la demande, au prix d'équilibre, est d'environ 287 objets.

Si on ne connaît pas encore le logarithme népérien, on ne peut que demander à la calculatrice l'image par f ou par g de l'arrondi 1,93, ce qui nous donnera un résultat moins précis.

On trouve $f(1,93)=e^{0,7\times 1,93}-1\approx 2,86$ et $g(1,93)=\frac{14}{e^{(0,7\times 1,93)}+1}\approx 2,88$.

Le chiffre d'affaire est égal au nombre d'objets vendus multiplié par le prix de vente de ces objets :

Avec les arrondis à l'euro près et à l'objet près obtenus précédemment, on trouve 55 391 € de chiffre d'affaire.
($287\times 193=55\,391$)

1 On pourrait montrer l'existence et l'unicité de cette solution à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, grâce à la continuité et à la stricte croissance de la fonction $x \longmapsto e^{0,7x}$.
2 Remarque analogue à la précédente.