Terminale ES – Exercice 4 du sujet Centres Étrangers de juin 2012

Partie A

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On note f' la fonction dérivée de f.

1) Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x)=(a-b-ax)\mathrm{e}^{-x}$.

2) On donne $f(0)=1$ et $f'(0)=3$. En déduire a et b.

Partie B

Dans cette partie, on admettra que $a=4$ et $b=1$. Donc, pour tout réel x, $f(x)=(4x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1) Étudier les variations de f sur ℝ.

2) Calculer pour tout réel x de ℝ, $f''(x)$, et étudier son signe en fonction de x. En déduire la convexité de f et l'éventuelle présence de points d'inflexions sur sa courbe.

3) Donner une équation de la tangente (T) au point C d'abscisse $\frac{7}{4}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère. Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T) ?

Partie C

Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine.
Le coût de la production, exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle [0;5] par la fonction f étudiée à la partie B.

1) Quel est le coût de production maximal hebdomadaire ? On arrondira le résultat à l'euro près.

2) Démontrer que la fonction F définie sur [0;5] par $\mathrm{F}(x)=(-4x-5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur ce même intervalle[1].

3) a) Calculer $\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

b) Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?

Corrigé

Partie A

1) a et b sont deux réels. f est définie sur ℝ par $\boxed{f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}}$.
$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $\boxed{u(x)=ax+b}$, $\boxed{u'(x)=a}$, $\boxed{v(x)=\mathrm{e}^{-x}}$ et $\boxed{v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}}$.

1 Cela revient à montrer que f est la dérivée de F sur [0;5]

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$,
soit $f'(x)=a\mathrm{e}^{-x}+(ax+b)\times(-\mathrm{e}^{-x})$, soit $f'(x)=(a-(ax+b))\mathrm{e}^{-x}$, soit $\boxed{f'(x)=(a-b-ax)\mathrm{e}^{-x}}$ C.Q.F.D.

2) $f(0)=1 \Leftrightarrow (a\times 0+b)\mathrm{e}^{-0}=1 \Leftrightarrow b\times 1=1 \Leftrightarrow \boxed{b=1}$.

Si $b=1$, alors $f'(x)=(a-1-ax)\mathrm{e}^{-x}$.

Dans ce cas de figure, $f'(0)=3 \Leftrightarrow (a-1-a\times 0)\mathrm{e}^{-0}=3 \Leftrightarrow (a-1)\times 1=3 \Leftrightarrow \boxed{a=4}$.

Conclusion : avec les conditions $f(0)=1$ et $f'(0)=3$, on trouve $a=4$ et $b=1$.

Partie B :

1) $a=4$, $b=1$, Pour tout réel x, $\boxed{f(x)=(4x+1)\mathrm{e}^{-x}}$,
donc $f'(x)=(4-1-4x)\mathrm{e}^{-x}$ soit $\boxed{f'(x)=(-4x+3)\mathrm{e}^{-x}}$

Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$ donc pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$, $f'(x)$ sera du signe de $-4x+3$. (d'après la règle des signes, puisque $f'(x)$ est le produit de $-4x+3$ par un nombre strictement positif)

$-4x+3>0 \Leftrightarrow -4x>-3 \Leftrightarrow x<\frac{3}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$ ou de $-4x+3$		+	0	−	
Variations de f		↗	$4\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$	↘	

$f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(4\times\frac{3}{4}+1\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}=4\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$.

2) Pour tout réel x, $f'(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $\boxed{u(x)=-4x+3}$, $\boxed{u'(x)=-4}$, $\boxed{v(x)=\mathrm{e}^{-x}}$ et $\boxed{v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}}$.
Donc pour tout réel x, $f''(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=-4\mathrm{e}^{-x}+(-4x+3)\times(-\mathrm{e}^{-x})=(-4+4x-3)\mathrm{e}^{-x}$.
Donc pour tout réel x, $\boxed{f''(x)=(4x-7)\mathrm{e}^{-x}}$.

Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$, $f''(x)$ est du signe de $4x-7$. $\quad 4x-7>0 \Leftrightarrow 4x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$ ou de $4x-7$		−	0	+	
Convexité de f		f est concave		f est convexe.	

f est donc concave sur $\left]-\infty;\frac{7}{4}\right]$, convexe sur $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$, et sa courbe présente un point d'inflexion : le point d'abscisse $\frac{7}{4}$.

3) Méthode 1 : on se souvient que si f est une fonction dérivable en a, une équation de la tangente à sa courbe représentative en son point d'abscisse a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

On calcule $f\left(\frac{7}{4}\right)=\left(4\times\frac{7}{4}+1\right)e^{-\frac{7}{4}}=8e^{-\frac{7}{4}}$ et $f'\left(\frac{7}{4}\right)=\left(-4\times\frac{7}{4}+3\right)e^{-\frac{7}{4}}=-4e^{-\frac{7}{4}}$.

Une équation de (T) est donc $y=-4e^{-\frac{7}{4}}\left(x-\frac{7}{4}\right)+8e^{-\frac{7}{4}}$, soit $y=-4e^{-\frac{7}{4}}x+7e^{-\frac{7}{4}}+8e^{-\frac{7}{4}}$,

soit $\boxed{y=(-4x+15)e^{-\frac{7}{4}}}$.

Méthode 2 : On ne se souvient pas de la formule de la tangente, mais on se doit de savoir que le nombre dérivé en a d'une fonction f est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a.

On calcule donc $\boxed{f'\left(\frac{7}{4}\right)=\left(-4\times\frac{7}{4}+3\right)e^{-\frac{7}{4}}=-4e^{-\frac{7}{4}}}$ et on en déduit que le coefficient directeur de (T) est $-4e^{-\frac{7}{4}}$, donc que l'équation réduite de (T) est de la forme $\boxed{y=-4e^{-\frac{7}{4}}x+p}$.

On cherche p sachant que le point de coordonnées $\left(\frac{7}{4};f\left(\frac{7}{4}\right)\right)$ appartient à (T).

On calcule : $f\left(\frac{7}{4}\right)=\left(4\times\frac{7}{4}+1\right)e^{-\frac{7}{4}}=8e^{-\frac{7}{4}}$, on a donc : $\boxed{8e^{-\frac{7}{4}}=-4e^{-\frac{7}{4}}x+p}$

$\boxed{8e^{-\frac{7}{4}}=-4e^{-\frac{7}{4}}\times\frac{7}{4}+p}$ $\Leftrightarrow$ $8e^{-\frac{7}{4}}=-7e^{-\frac{7}{4}}+p$ $\Leftrightarrow$ $8e^{-\frac{7}{4}}+7e^{-\frac{7}{4}}=p$, soit $\boxed{p=15e^{-\frac{7}{4}}}$.

L'équation réduite de (T) est donc $\boxed{y=-4e^{-\frac{7}{4}}x+15e^{-\frac{7}{4}}}$[2].

Remarque : à la factorisation par $e^{-\frac{7}{4}}$ près du second membre, il s'agit bien de la même équation de droite que celle trouvée avec la méthode 1.

Comme le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\frac{7}{4}$ est son point d'inflexion, on s'attend que la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (T) change en ce point.

L'étude de cette position relative revient à étudier le signe de $h(x)=f(x)-\underbrace{(-4x+15)e^{-\frac{7}{4}}}_{\text{fonction affine dont (T) est la courbe représentative.}}$

$h(x)=f(x)-(-4x+15)e^{-\frac{7}{4}}=(4x+1)e^{-x}+(4x-15)e^{-\frac{7}{4}}$.

2 Il faut bien comprendre que $-4e^{-\frac{7}{4}}$ et $15e^{-\frac{7}{4}}$ sont des constantes.

Pour étudier le signe de $h(x)$, la logique est de résoudre l'inéquation $h(x)>0$. Mais j'ai essayé et constaté que je suis incapable de résoudre une telle inéquation.

L'idée donnée par le corrigé des annales est de dériver deux fois la fonction h.
Comme $h=f-(une\ fonction\ affine)$, $h''=f''$.

<u>En effet</u> : pour toute fonction affine g définie par $g(x)=ax+b$ où a et b sont deux réels constants, $g'(x)=a$ et $g''(x)=0$.

Pour tout x de ℝ, $h''(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe. On a déjà étudié le signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
Signe de $h''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h'	↘		$h\left(\frac{7}{4}\right)$		↗

Calculons $h'\left(\frac{7}{4}\right)$, donc calculons d'abord $h'(x)$ pour tout réel x .

On rappelle que pour tout réel x , $h(x)=(4x+1)e^{-x}+e^{-\frac{7}{4}}(4x+5)$ soit $h(x)=f(x)-e^{-\frac{7}{4}}(4x+5)$.

Donc pour tout réel x , $h'(x)=f'(x)-4e^{-\frac{7}{4}}=(-4x+3)e^{-x}-4e^{-\frac{7}{4}}$.

On a donc $h'\left(\frac{7}{4}\right)=\left(-4\times\frac{7}{4}+3\right)e^{-\frac{7}{4}}-4e^{-\frac{7}{4}}=10e^{-\frac{7}{4}}-4e^{\frac{-7}{4}}$ $\boxed{h'\left(\frac{7}{4}\right)=6e^{-\frac{7}{4}}}$.

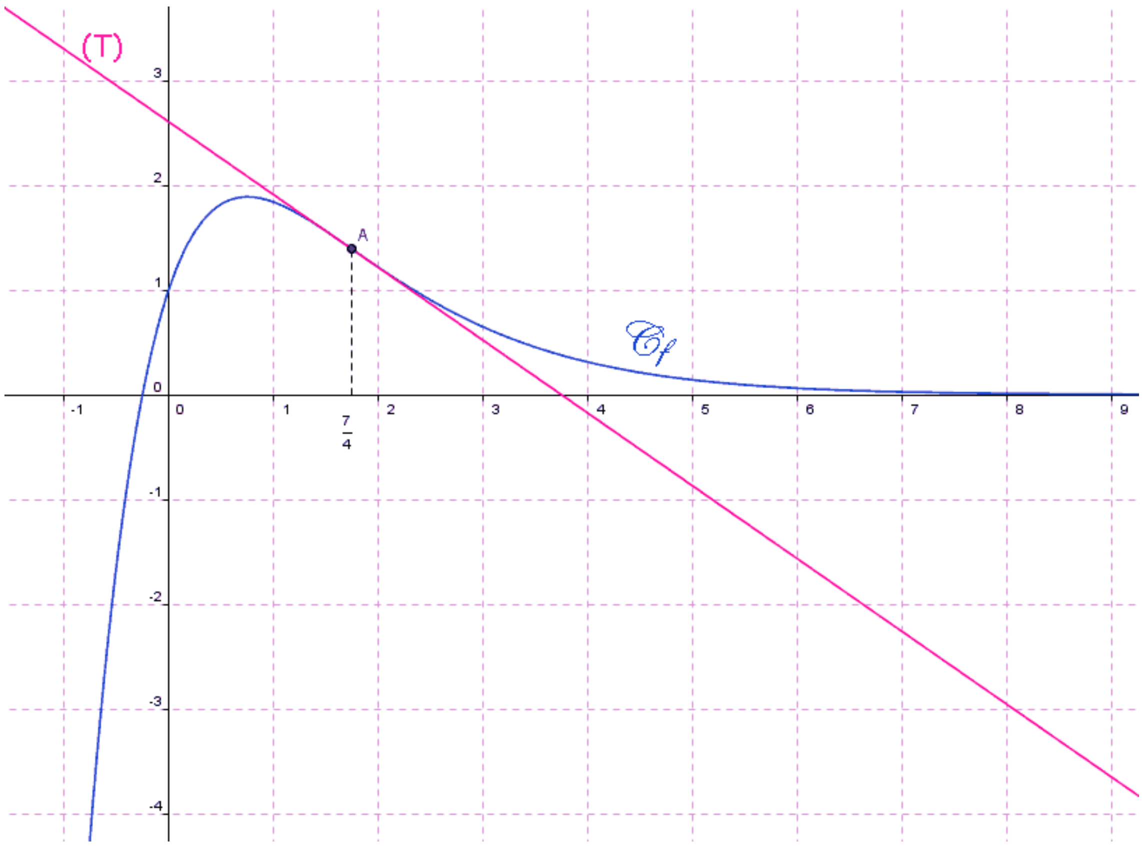
Le minimum de h' sur ℝ est donc strictement positif (car 6 et $e^{-\frac{7}{4}}$ le sont).
h' est donc positive sur ℝ, donc h est strictement croissante sur ℝ.

x	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
signe de $h'(x)$		$+$		$+$	
Variations de h		↗	0	↗	
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	

On sait que h s'annule en $\frac{7}{4}$ car le point de coordonnées $\left(\frac{7}{4};f\left(\frac{7}{4}\right)\right)$ est commun à $\mathscr{C}_f$ et à (T).

D'après l'étude du signe de h , <u>la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au-dessous de la tangente (T) pour les abscisses inférieurs à $\boxed{\frac{7}{4}}$, et au-dessus de la tangente (T) pour les abscisses supérieurs à</u> $\boxed{\frac{7}{4}}$.

Traçons $\mathscr{C}_f$ et (T) sur Geogebra pour une vérification graphique :



Partie C

1) Sur $\mathbb{R}$ comme sur [0;5], le maximum de f est atteint pour $x=\frac{7}{4}$.

On a vu que $f\left(\frac{7}{4}\right)=8e^{-\frac{7}{4}}$, dont une valeur approchée à 10^{-3} près est est 1,390. Le coût de production maximal hebdomadaire est donc d'environ **1 390 €**.

2) F est la fonction définie sur [0;5] par $\boxed{F(x)=(-4x-5)e^{-x}}$.
F(x) est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=-4x-5$, $u'(x)=-4$, $v(x)=e^{-x}$ et $v'(x)=-e^{-x}$.
Nommons F' la dérivée de F sur [0;6]. Pour tout x ∈ [0;6], on a :
$F'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=-4e^{-x}+(-4x-5)\times(-e^{-x})=(-4+4x+5)e^{-x}=(4x+1)e^{-x}$.
Pour tout x ∈ [0;5], on a bien $F'(x)=f(x)$. F est bien une primitive de f sur [0;6].

3) a) $\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx=\frac{1}{5}(F(5)-F(0))=\frac{1}{5}((-4\times5-5)e^{-5}-(-4\times0-5)e^{-0})=\frac{1}{5}(-25e^{-5}-(-5)\times1)$

$\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx=\frac{1}{5}(-25e^{-5}+5)$, soit $\boxed{\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx=-5e^{-5}+1}$. $\boxed{\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx\approx0{,}966}$.

b) $\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx$ est la valeur moyenne de la fonction f sur [0;5]. Il s'agit du coût de production moyen pour une production variant entre 0 et 500 objets, en milliers d'euros.
On peut dire que le coût de production est en moyenne de 966 € par semaine, pour une production comprise entre 0 et 500 objets par semaine.