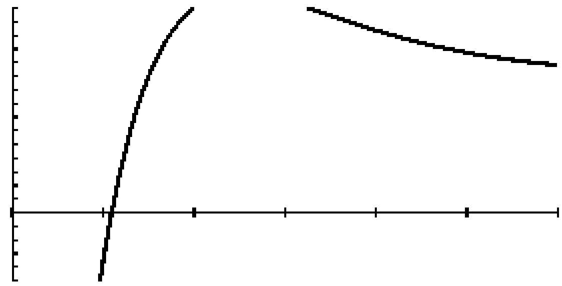
Exercice 4 du bac ES Métropole du 22 juin 2012.

Énoncé :

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par :

$$f(x)=(200x-300)e^{-x-1}+10 .$$

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0;6].



Partie A : Objectif « Réaliser un bénéfice maximal »

L'écran ne permet pas à Alix de déterminer le bénéfice maximal.
Il décide donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle [0;6]. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle [0;6]. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.

1) Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;6] : $f'(x)=(500-200x)e^{-x-1}$. 0,5 pt

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [0;6]. 1 pt

3) En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à l'euro) 1 pt

4) Proposer un réglage de la fenêtre graphique permettant de visualiser le maximum de la fonction f. 0,5 pt

Partie B : Objectif « ne pas vendre à perte ».

1) Au vu du graphique obtenu par Alix, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ? 0,5 pt

2) Démontrer que sur l'intervalle $[1;2]$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique notée α. 1 pt

3) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. 0,5 pt

4) Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte. 1 pt

Corrigé

Partie A.

1) On sait que, pour tout $x \in [0;6]$, $f(x)=(200x-300)e^{-x-1}+10$ et on admet que f est dérivable sur [0;6].

$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)+10$, avec $\boxed{u(x)=200x-300}$, $\boxed{u'(x)=200}$, $\boxed{v(x)=e^{-x-1}}$ et $\boxed{v'(x)=-e^{-x-1}}$.

Donc pour tout x de [0;6], $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)+10$,
soit $f'(x)=200e^{-x-1}+(200x-300)\times(-e^{-x-1})=(200-200x+300)e^{-x-1}$,
soit $f'(x)=(-200x+500)e^{-x-1}$ ou $\boxed{f'(x)=(500-200x)e^{-x-1}}$ C.Q.F.D.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x>0$ donc $e^{-x-1}>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $500-200x$ ou encore $-200x+500$. $-200x+500=0 \Leftrightarrow -200x=-500 \Leftrightarrow x=\frac{-500}{-200}=\frac{5}{2}$ ou encore $x=2,5$.

x	0		$\frac{5}{2}$		6
signe de $f'(x)$ ou de $-200x+500$		$+$	0	$-$	
variations de f	$\frac{-300}{e}+10$	$\nearrow$	$200e^{-3,5}+10$	$\searrow$	$900e^{-7}+10$

$f(0)=(200\times0-300)\times e^{-0-1}+10=-300e^{-1}+10=-\frac{300}{e}+10$ $\qquad f(0)\approx-100,364$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(200\times\frac{5}{2}-300\right)\times e^{-\frac{5}{2}-1}+10=200e^{-3,5}+10$ $\qquad f\left(\frac{5}{2}\right)\approx16,039$

$f(6)=(200\times6-300)e^{-6-1}+10=900e^{-7}+10$ $\qquad f(6)\approx10,821$

3) Pour réaliser le bénéfice maximal, il faut donc vendre $\frac{5}{2}\times100=250$ objets.
Le bénéfice est alors d'environ 16 039 € (valeur arrondie à l'euro près)

4) Pour visualiser le maximum de la fonction sur sa courbe, il faut prendre une valeur maximale pour Y légèrement supérieure au maximum. Si on choisit un Y minimal de -100, la courbe va être trop aplatie. Un Yminimal de -10 peut donner une meilleur visualisation du maximum, même s'il ne nous permet pas de voir la partie de la courbe pour les x variant entre 0 et 1.

Idée de proposition : $\mathrm{X}\,min=0$ $\quad \mathrm{X}\,max=6$ $\quad scl=1$ $\quad \mathrm{Y}\,min=-10$ $\quad \mathrm{Y}\,max=18$ $\quad scl=5$.

Bien sûr, on peut zoomer autour du point de coordonnées $\left(\frac{5}{2};16,04\right)$ pour une visualisation plus précise.

Par exemple : $\mathrm{X}\,min=2$ $\quad \mathrm{X}\,max=3$ $\quad scl=1$ et $\mathrm{Y}\,min=15$ $\quad \mathrm{Y}\,max=17$ $\quad scl=1$. Le désavantage, c'est qu'on ne voit plus les axes, mais on peut obtenir les coordonnées des points de la courbe à l'aide de la commande TRACE.

Partie B

1) On vend à perte quand le bénéfice est négatif. D'après le graphique d'Alix, le bénéfice devient positif à partir d'une valeur de x proche de 1,1, soit : l'entreprise ne vend pas à perte à partir d'environ 110 objets vendus.

2) $f(1)=(200\times1-300)\mathrm{e}^{-1-1}+10 \quad f(1)=-100\mathrm{e}^{-2}+10$.
$f(2)=(200\times2-300)\mathrm{e}^{-2-1}+10 \quad f(2)=100\mathrm{e}^{-3}+10$.

On sait que $f(2)>0$ car il est la somme de deux nombres strictement positifs, $100\mathrm{e}^{-3}$ (car 100 et e^{-3} sont strictement positifs tous deux) et 10.

Pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f sur l'intervalle [1;2], comme on sait que f est continue car dérivable et strictement croissante sur cet intervalle, il faut prouver que $f(1)<0$.

$2<\mathrm{e}<3$ donc $4<\mathrm{e}^2<9$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et que les trois membres de cet encadrement sont bien dans cet intervalle.

Donc $\frac{1}{4}>\frac{1}{\mathrm{e}^2}>\frac{1}{9}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, intervalle auquel appartiennent bien les 3 membres de l'encadrement $4<\mathrm{e}^2<9$.
Comme $\mathrm{e}^{-2}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$, on a $\frac{1}{4}>\mathrm{e}^{-2}>\frac{1}{9}$, donc $-100\times\frac{1}{4}<-100\mathrm{e}^{-2}<-100\times\frac{1}{9}$, soit $-25<-100\mathrm{e}^{-2}<-\frac{100}{9}$, en multipliant les trois membres par -100 .
En ajoutant 10 aux deux membres, on obtient : $-15<-100\mathrm{e}^{-2}+10<-\frac{100}{9}+10$, donc $f(1)<-\frac{100}{9}+10$

Or $-\frac{100}{9}+10=-\frac{100}{9}+\frac{90}{9}=-\frac{10}{9}<0$. Donc $f(1)<0$.

On a donc : $\boxed{f(1)<0}$, $\boxed{f(2)>0}$, f est continue car dérivable sur [1;2] et f est strictement croissante sur $[1;2]$ d'après l'étude de ses variations. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α à l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $[1;2]$.

3) On fait effectuer un tableau de valeurs de f de pas 0,1 à la calculatrice sur l'intervalle [1;2]. On trouve :
$f(1)<0$ et $f(1{,}1)>0$.
Alors on fait effectuer un tableau de valeurs de f de pas 0,01 à la calculatrice sur l'intervalle [1;1,1]. On trouve : $f(1{,}09)<0$ et $f(1{,}10)>0$.
On fait enfin calculer $f(1{,}095)$ et on trouve environ $0{,}0313>0$. Donc une valeur arrondie de α à 10^{-2} près est $\boxed{1{,}09}$.

4) Comme $f(1{,}09)<0$ et $f(1{,}10)>0$, c'est à partir de 110 objets vendus que l'entreprise ne vend pas à perte.