Terminale ES – Exercices sur les fonctions exponentielles – Fiche 1 - Corrigés

Exercice 1 : $\dfrac{3^{2x+2}}{3^{2x+1}} \times 3^x = 3^{2x+2-(2x+1)+x} = 3^{2x+2-2x-1+x} = \boxed{3^{x+1}}$

Exercice 2 :

1) Résolvons l'inéquation $q^{3x+1} < q^{-2x+3}$. On sait que $q > 1$, donc la fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc q^{3x+1} et q^{-2x+3} sont rangés dans le même ordre que $3x+1$ et $-2x+3$.
Ainsi, $q^{3x+1} < q^{-2x+3} \Leftrightarrow 3x+1 < -2x+3 \Leftrightarrow 5x < 2 \Leftrightarrow x < \dfrac{2}{5}$. Or $\dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

Donc $\boxed{S =]-\infty ; 0{,}4[}$, réponse a)

2) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x+1}$.
$f(x)$ est donc de la forme $e^{u(x)}$, où u est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x ∈ $\mathbb{R}$, $u(x) = -x+1$, donc $u'(x) = -1$.
La dérivée f' de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$,
soit $f'(x) = -e^{-x+1}$ ou encore $\boxed{f'(x) = -e^{1-x}.}$ Réponse b)

Exercice 3 :

1) Soit x un réel quelconque et q un réel strictement positif.
$\dfrac{q^{3x}}{q^{-2x}} = q^{3x-(-2x)} = q^{5x}$. On sait déjà que la réponse b) convient.
$q^{-\frac{3}{2}}$ n'est pas égal à q^{5x} pour tout x réel, puisque $-\dfrac{3}{2}$ est une constante ne dépendant pas de x, contrairement à $5x$.

Mais $(q^x)^5 = q^{5x}$ pour tout x réel. Donc la réponse c) est correcte aussi.
Les bonnes réponses sont les réponses b) et c).

2) Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+2x}$, sa fonction dérivée f' est définie par :

a) $f'(x) = (-2x+2)e^{-x^2+2x}$ b) $f'(x) = \dfrac{(-2x+2)e^{-x^2}}{e^{-2x}}$ c) $f'(x) = e^{-2x+2}$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+2x}$. $f(x)$ est de la forme $e^{u(x)}$, où u est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -x^2+2x$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée u' est définie sur $\mathbb{R}$ par $u'(x) = -2x+2$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$, soit $\boxed{f'(x) = (-2x+2)e^{-x^2+2x}}$.
On sait déjà que la réponse a) convient.

Testons la réponse b) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(-2x+2)e^{-x^2}}{e^{-2x}} = (-2x+2) \times \dfrac{e^{-x^2}}{e^{-2x}} = (-2x+2) \times e^{-x^2+2x} = f'(x)$.
La réponse b) convient aussi.

La réponse c) ne convient pas car la dérivée de e^u n'est pas $e^{u'}$ mais $u'e^u$.

Les réponses correctes sont les réponses a) et b).

Exercice 4 : a) $\dfrac{(2^3)^2}{2^6}=\dfrac{2^6}{2^6}=1$ b) $0{,}7^{-1}\times 0{,}7=0{,}7^{-1}\times 0{,}7^1=0{,}7^{-1+1}=0{,}7^0=1$ c) $e^2\times e^{-2}=e^0=1$

d) $(2^2+1)^2=(4+1)^2=5^2=25$

Exercice 5 : $q>0$. a) $\dfrac{q^2\times q^3}{q}=\dfrac{q^5}{q^1}=q^4$ b) $((q^2)^2)^2=(q^4)^2=q^8$ c) $((q^{-1})^2)^{-2}=(q^{-2})^{-2}=q^4$

Exercice 6 : a) $4^{\frac{1}{6}}=(2^2)^{\frac{1}{6}}=2^{\left(2\times\frac{1}{6}\right)}=2^{\frac{1}{3}}$ Donc $4^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}$.

b) $8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2^{3\times\frac{1}{3}}=2^1=2$ et $32^{\frac{1}{5}}=(8\times 4)^{\frac{1}{5}}=(2^3\times 2^2)^{\frac{1}{5}}=(2^5)^{\frac{1}{5}}=2^{5\times\frac{1}{5}}=2^1=2$. Donc $8^{\frac{1}{3}}=32^{\frac{1}{5}}$

c) $27^{\frac{5}{3}}=(3^3)^{\frac{5}{3}}=3^{3\times\frac{5}{3}}=3^5$, donc $27^{\frac{5}{3}}=3^5$.

d) $\dfrac{2^3}{2^{-3}}=2^{3-(-3)}=2^6$ et $4^3=(2^2)^3=2^{(2\times 3)}=2^6$, donc $\dfrac{2^3}{2^{-3}}=4^3$.

e) $16^{-\frac{3}{4}}=(2^4)^{-\frac{3}{4}}=2^{4\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$. Donc $16^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{8}$.

f) $27^{\frac{3}{2}}=(3^3)^{\frac{3}{2}}=3^{3\times\frac{3}{2}}=3^{\frac{9}{2}}$ et $(\sqrt{3})^9=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^9=3^{\frac{9}{2}}$, donc $27^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{3})^9$.

Exercice 7 : $q>0$.

$A=\left(\dfrac{1}{q^{0,3}}\right)^{-2}=\dfrac{1^{-2}}{(q^{0,3})^{-2}}=\dfrac{1}{q^{-0,6}}$ $\boxed{A=q^{0,6}}$. Règles utilisées : , $(q^a)^b=q^{ab}$ et $q^{-a}=\dfrac{1}{q^a}$.

Autre possibilité : $A=\left(\dfrac{1}{q^{0,3}}\right)^{-2}=(q^{-0,3})^{-2}=q^{-0,3\times(-2)}$ $\boxed{A=q^{0,6}}$

$B=\left(\dfrac{1}{q^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\times q=(q^{-2})^{-\frac{1}{4}}=q^{-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}=q^{\frac{1}{2}}$ $\boxed{B=q^{\frac{1}{2}}}$ ou $\boxed{B=\sqrt{q}}$.

$C=\dfrac{q^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{1}{6}}}=q^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=q^{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}=q^{\frac{3}{6}}$ $\boxed{C=q^{\frac{1}{2}}}$ ou $\boxed{C=\sqrt{q}}$.

$D=\sqrt{\sqrt{q}}=\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=q^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$ $\boxed{D=q^{\frac{1}{4}}}$ ou $\boxed{D=\sqrt[4]{q}}$

$E=\left(q^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=q^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}$ $\boxed{E=q^{\frac{1}{4}}}$ ou $\boxed{E=\sqrt[4]{q}}$

$F=q^{\frac{1}{2}}\times((q^2)^3)=q^{\frac{1}{2}}\times q^6=q^{\frac{1}{2}+6}=q^{\frac{1}{2}+\frac{12}{2}}$ $\boxed{F=q^{\frac{13}{2}}}$

$G=\left(\dfrac{1}{q}\right)^{\frac{2}{3}}\times q^{\frac{2}{3}}=(q^{-1})^{\frac{2}{3}}\times q^{\frac{2}{3}}=(q^{-1}\times q^1)^{\frac{2}{3}}=(q^0)^{\frac{2}{3}}=1^{\frac{2}{3}}$ $\boxed{G=1}$ (car $(q\times p)^a=q^a\times p^a$ soit $q^a\times p^a=(q\times p)^a$)

$H=\dfrac{(q^2)^{\frac{1}{3}}\times(q^3)^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{q^{\frac{2}{3}}\times q^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{1}{6}}}=q^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}}=q^{\frac{4}{6}+\frac{9}{6}-\frac{1}{6}}=q^{\frac{12}{6}}$ $\boxed{H=q^2}$

$I=((q^{-0,2})^2)^3\times q^{0,4}=(q^{-0,4})^3\times q^{0,4}=q^{-1,2}\times q^{0,4}$ $\boxed{I=q^{-0,8}}$.

Exercice 8 : $J=\dfrac{e^3\times e^{-1}}{e^7}=e^{3-1-7}$ $\boxed{J=e^{-5}}$

$K=\dfrac{(e^{-2})^3\times e^{-5}}{(e^2)^2}=\dfrac{e^{-6}\times e^{-5}}{e^4}=e^{-6-5-4}$ $\boxed{K=e^{-15}}$

$L=\dfrac{1}{e^{0,3}}\times\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e^{0,3}\times e^1}=\dfrac{1}{e^{1,3}}$ $\boxed{L=e^{-1,3}}$

$M(x)=\dfrac{e^{7x}\times e^x}{e^8}=\dfrac{e^{7x+x}}{e^8}=\dfrac{e^{8x}}{e^8}$ $\boxed{M(x)=e^{8x-8}}$ ou $\boxed{M(x)=e^{8(x-1)}}$

$N(x)=\dfrac{e^{7x}\times e^{-7}}{e^x}=e^{7x-7-x}$ $\boxed{N(x)=e^{6x-7}}$

$O(x)=\dfrac{1}{e^{3x+1}}\times e^{-x-3}=e^{-(3x+1)-x-3}=e^{-3x-1-x-3}$ $O(x)=e^{-4x-4}$ ou $\boxed{O(x)=e^{-4(x+1)}}$

Exercice 9 : a) $(e^x+1)(e^x-1)=(e^x)^2-1^2=e^{2x}-1$, donc $\boxed{(e^x+1)(e^x-1)=e^{2x}-1}$. car .

b) $(e^x+1)^2=(e^x)^2+2\times e^x\times 1+1^2=e^{2x+2e^x+1}$ donc $\boxed{(e^x+1)^2=e^{2x}+2e^x+1}$. car $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

c) $(e^{x-3}-2)(e^x+1)=e^{x-3}\times e^x+e^{x-3}\times 1-2e^x-2=e^{x-3+x}+e^{x-3}-2e^x-2=e^{2x-3}+e^{x-3}-2e^x-2$.
Donc $\boxed{(e^{x-3}-2)(e^x+1)=e^{2x-3}+e^{x-3}-2e^x-2}$. car $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

d) $e^{1-x}\times e^{3x-2}=e^{1-x+3x-2}=e^{2x-1}$ et $\dfrac{1}{e}e^{2x}=e^{-1}\times e^{2x}=e^{2x-1}$, donc $\boxed{e^{1-x}\times e^{3x-2}=\dfrac{1}{e}e^{2x}}$.

e) $(e^x-e^{-x})^2=(e^x)^2-2\times e^x\times e^{-x}+(e^{-x})^2=e^{2x}-2e^{x-x}+e^{-2x}=e^{2x}-2\times 1+\dfrac{1}{e^{2x}}=e^{2x}+\dfrac{1}{e^{2x}}-2$.

Donc $\boxed{(e^x-e^{-x})^2=e^{2x}+\dfrac{1}{e^{2x}}-2}$, car $(a-b)^2=a^2+2ab+b^2$.

f) Dans $90\times\dfrac{e^x}{2e^x+1}=\dfrac{90e^x}{2e^x+1}$, divisons le numérateur et le dénominateur par e^x qui est non nul car pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$.

$$\frac{90e^x}{2e^x+1}=\frac{\dfrac{90\times(e^x)}{e^x}}{\dfrac{2e^x+1}{e^x}}=\frac{90}{\dfrac{2e^x}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}}=\frac{90}{2+e^{-x}}$$. Donc $\boxed{\dfrac{90}{2+e^x}=90\times\dfrac{e^x}{2e^x+1}}$.

g) $\dfrac{2,5}{e^{0,5x-1}}+2e\times\dfrac{0,5x}{e^{0,5x}}=2,5\times e^{-0,5x+1}+2e\times 0,5x\times e^{-0,5x}$ car $\dfrac{1}{e^a}=e^{-a}$.

Donc $\dfrac{2,5}{e^{0,5x-1}}+2e\times\dfrac{0,5x}{e^{0,5x}}=2,5e^{-0,5x+1}+2\times 0,5\times x\times e^1\times e^{-0,5x}=2,5e^{-0,5x+1}+x\times e^{-0,5x+1}=(2,5+x)e^{-0,5x+1}$.

Donc $\boxed{\dfrac{2,5}{e^{0,5x-1}}+2e\times\dfrac{0,5x}{e^{0,5x}}=(2,5+x)e^{e^{-0,5x+1}}}$.

Exercice 10 : $A=2e^{-50}$ $B=-2e^{\frac{3}{2}}$ $C=-2e^{\sqrt{3}}$.

Comme, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$, A est strictement positif (puisque 2 et e^{-50} le sont), et B et C sont strictement négatifs, car $-2<0$, $e^{\frac{3}{2}}>0$ et $e^{\sqrt{3}}>0$. Donc A est plus grand que B et C.

Il reste à comparer $\sqrt{3}$ et $\frac{3}{2}$ afin de comparer B et C.

Tout le monde est censé savoir que $\frac{3}{2}=1{,}5$, mais pas que $\sqrt{3}\approx 1{,}73$ sans calculatrice.

Pour les comparer, élevons-les au carré :
Comme $\sqrt{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont positifs, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés (puisque la fonction « carré » est strictement croissante sur $[0;+\infty[$).
$(\sqrt{3})^2=3$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}=\frac{8}{4}+\frac{1}{4}=2{,}25$. Donc $(\sqrt{3})^2>\left(\frac{3}{2}\right)^2$,
donc, comme $\sqrt{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont positifs, $\sqrt{3}>\frac{3}{2}$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, elle conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$ et on a : $e^{\sqrt{3}}>e^{\frac{3}{2}}$.

Comme $-2<0$, lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité par -2 , on change le sens de cette inégalité. Donc $e^{\sqrt{3}}>e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -2e^{\sqrt{3}}<-2e^{\frac{3}{2}}$, soit $C<B$.

Conclusion : $\boxed{C<B<A}$.

Exercice 11 : $A=e^{5\pi+2}$ $B=\frac{e^{5\pi}}{e^{-3}}=e^{5\pi+3}$ $C=(e^{5\pi})^2=e^{10\pi}=e^{5\pi+5\pi}$

$\pi>1$ donc $5\pi>5$.

On a donc $5\pi+2<5\pi+3<5\pi+5\pi$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
$5\pi+2<5\pi+3<5\pi+5\pi \Leftrightarrow e^{5\pi+2}<e^{5\pi+3}<e^{5\pi+5\pi}$, soit $\boxed{A<B<C}$.

Exercice 12 : $A=\frac{e^5}{-e^{\pi}+1}$ et $B=\frac{e^{\frac{11}{2}}}{-e^{\pi}+1}$.

$\frac{11}{2}=5{,}5$, donc $5<\frac{11}{2}$, donc $\boxed{e^5<e^{\frac{11}{2}}}$.

On souhaite diviser les deux membres de cette inégalité par $-e^{\pi}+1$. Pour savoir s'il faut ou non changer le sens de l'inégalité, il faut connaître le signe de $-e^{\pi}+1=1-e^{\pi}$.

Comme $\pi>0$, $e^{\pi}>1$ (d'après les variations de la fonction exponentielle et le fait que $e^0=1$)
Donc $1-e^{\pi}<0$, soit $-e^{\pi}+1<0$.

Donc $e^5<e^{\frac{11}{2}} \Leftrightarrow \frac{e^5}{-e^{\pi}+1}>\frac{e^{\frac{11}{2}}}{-e^{\pi}+1}$, soit $\boxed{A>B}$.

Exercice 13 : $A=\frac{e^{\pi}+1}{2-e}$ et $B=\frac{e^3+1}{2-e}$.

On sait que $e\approx 2{,}718$ donc que $e>2$, donc que $2-e<0$.

Or $\pi\approx 3{,}14$, donc $\pi>3 \Leftrightarrow e^{\pi}>e^{3}$ puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.
$e^{\pi}>e^{3} \Leftrightarrow e^{\pi}+1>e^{3}+1$ en ajoutant 1 aux deux membres.
et $e^{\pi}+1>e^{3}+1 \Leftrightarrow \dfrac{e^{\pi}+1}{2-e}<\dfrac{e^{3}+1}{2-e}$ en divisant les deux membres par $2-e$ qui est strictement négatif.
Donc $\boxed{A<B}$.

Exercice 14 : Résoudre dans ℝ les équations suivantes :
a) $2^{x}=8 \Leftrightarrow 2^{x}=2^{3} \Leftrightarrow x=3$ car la fonction exponentielle de base 2 est bijective car elle est strictement croissante sur ℝ. $\boxed{S=\{3\}}$.

b) $2^{x}=4^{x+1} \Leftrightarrow 2^{x}=(2^{2})^{x+1} \Leftrightarrow 2^{x}=2^{2(x+1)} \Leftrightarrow x=2(x+1) \Leftrightarrow x=2x+2 \Leftrightarrow -x=2 \Leftrightarrow x=-2$. $\boxed{S=\{-2\}}$.

c) $0{,}81^{x}=1 \Leftrightarrow 0{,}81^{x}=0{,}81^{0} \Leftrightarrow x=0$. $\boxed{S=\{0\}}$.

d) $1{,}39^{2x}=1 \Leftrightarrow 1{,}39^{2x}=1{,}39^{0} \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$. $\boxed{S=\{0\}}$.

e) $27\times 3^{x}=3^{2-x} \Leftrightarrow 3^{3}\times 3^{x}=3^{2-x} \Leftrightarrow 3^{3+x}=3^{2-x} \Leftrightarrow 3+x=2-x \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$. $\boxed{S=-\dfrac{1}{2}}$.

f) $3^{x^{2}}=9 \Leftrightarrow 3^{x^{2}}=3^{2} \Leftrightarrow x^{2}=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$. $\boxed{S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}}$

g) $(2^{x}+1)(2^{x}-1)=0 \Leftrightarrow 2^{x}+1=0$ ou $2^{x}-1=0 \Leftrightarrow 2^{x}=-1$ ou $2^{x}=1$.

D'après la courbe représentative des fonctions exponentielles, on sait que $2^{x}>0$ pour tout $x\in$ ℝ.
Donc l'équation $2^{x}=-1$, n'a pas de solution dans ℝ.

Donc $(2^{x}+1)(2^{x}-1)=0 \Leftrightarrow 2^{x}=1 \Leftrightarrow 2^{x}=2^{0} \Leftrightarrow x=0$. $\boxed{S=\{0\}}$.

Autre résolution possible :
$(2^{x}+1)(2^{x}-1)=0 \Leftrightarrow (2^{x})^{2}-1^{2}=0 \Leftrightarrow 2^{2x}=1 \Leftrightarrow 2^{2x}=2^{0} \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$, donc $\boxed{S=\{0\}}$.

h) $2^{x}(2^{2x}-1)=2^{x}$. Pour tout $x\in$ ℝ, $2^{x}>0$ donc $2^{x}\neq 0$.
On a donc le droit de diviser les deux membres de l'équation par 2^{x} qui est non nul.
Donc $2^{x}(2^{2x}-1)=2^{x} \Leftrightarrow 2^{2x}-1=1 \Leftrightarrow 2^{2x}=2 \Leftrightarrow 2^{2x}=2^{1} \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

Exercice 15 : a) $e^{x+1}=1 \Leftrightarrow e^{x+1}=e^{0} \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. $\boxed{S=\{-1\}}$.

b) $e^{2x+1}=e \Leftrightarrow e^{2x+1}=e^{1} \Leftrightarrow 2x+1=1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$. $\boxed{S=\{0\}}$

c) $e^{3x-1}=e^{x} \Leftrightarrow 3x-1=x \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

d) $(e^{x}+1)^{2}=1 \Leftrightarrow (e^{x}+1)^{2}-1=0 \Leftrightarrow (e^{x}+1)^{2}-1^{2}=0 \Leftrightarrow (e^{x}+1+1)(e^{x}+1-1)=0$
$\Leftrightarrow (e^{x}+2)\times e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}+2=0$ ou $e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}=-2$ ou $e^{x}=0$.
Or pour tout x , $e^{x}>0$, donc l'équation n'a pas de solution. $\boxed{S=\emptyset}$.

Autre résolution possible : on sait que deux nombres ont le même carré si et seulement si ils sont soit égaux, soit opposés, donc : $(e^x+1)^2=1 \Leftrightarrow (e^x+1)^2=1^2 \Leftrightarrow e^x+1=1$ ou $e^x+1=-1 \Leftrightarrow e^x=0$ ou $e^x=-2$, et on conclut comme précédemment.

e) $e^{x(x+1)}=1 \Leftrightarrow e^{x(x+1)}=e^0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x+1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$. $\boxed{S=\{-1;0\}}$.

f) $e^{x-3}=e^{2-3x} \Leftrightarrow x-3=2-3x \Leftrightarrow 4x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$. $\boxed{S=\left\{\frac{5}{4}\right\}}$.

g) $e^{5x}=e^{x^2+1} \Leftrightarrow 5x=x^2+1 \Leftrightarrow 0=x^2-5x+1$ $\quad\Delta=(-5)^2-4\times1\times(+1)=25-4=21$.

L'équation a deux solutions : $x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{21}}{2\times1}=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. $\boxed{S=\left\{\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right\}}$.

h) $e^x=\frac{1}{e^{x+1}} \Leftrightarrow e^x=e^{-(x+1)} \Leftrightarrow e^x=e^{-x-1} \Leftrightarrow x=-x-1 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$. $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}}$.

<u>Exercice 16</u> : a) $1{,}25^{x-1}<1{,}25 \Leftrightarrow 1{,}25^{x-1}<1{,}25^1 \Leftrightarrow x-1<1$ car $1{,}25>1$ donc la fonction exponentielle de base 1,25 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $1{,}25^{x-1}<1{,}25 \Leftrightarrow x<2$. $\boxed{S=]-\infty;2[}$.

b) $4{,}1^{3x}<4{,}1^{x+1} \Leftrightarrow 3x<x+1$ car 4,1>1 $\Leftrightarrow 2x<1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$. $\boxed{S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[}$

c) $0{,}72^x\leqslant0{,}72 \Leftrightarrow 0{,}72^x\leqslant0{,}72^1 \Leftrightarrow x\geqslant1$ car $0<0{,}72<1$. $\boxed{S=[1;+\infty[}$.

d) $0{,}72^{3x}<0{,}72^{x+1} \Leftrightarrow 3x>x+1$ (car $0<0{,}72<1$) $\Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$. $\boxed{S=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[}$

e) $2^{3x}<4^{2x+1} \Leftrightarrow 2^{3x}<(2^2)^{2x+1} \Leftrightarrow 2^{3x}<2^{2(2x+1)} \Leftrightarrow 3x<2(2x+1)$ (car $2>1$)
$\Leftrightarrow 3x<4x+2 \Leftrightarrow -x<2 \Leftrightarrow x>-2$ $\boxed{S=]-2;+\infty[}$.

f) $27^{-x}\geq3^{x+2} \Leftrightarrow (3^3)^{-x}\geqslant3^{x+2} \Leftrightarrow 3^{-3x}\geqslant3^{x+2} \Leftrightarrow -3x\geqslant x+2$ car 3>0.
$\Leftrightarrow -4x\geqslant2 \Leftrightarrow x\leqslant-\frac{2}{4} \Leftrightarrow x\leqslant-\frac{1}{2}$ $\boxed{S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]}$.

g) $(0{,}25^x+1)^2>1 \Leftrightarrow (0{,}25^x+1)^2-1^2>0 \Leftrightarrow (0{,}25^x+1+1)(0{,}25^x+1-1)>0$ car $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
$\Leftrightarrow (0{,}25^x+2)\times0{,}25^x>0$.
Pour tout x ∈ $\mathbb{R}$, $0{,}25^x>0$ car les fonctions exponentielles sont à valeurs strictement positives (voir leurs courbes). Donc pour tout réel x, $0{,}25^x+2>0$ et $0{,}25^x>0$, donc $(0{,}25^x+2)\times0{,}25^x>0$.

Tout réel x est donc solution de cette inéquation. $\boxed{S=\mathbb{R}}$.

h) $(0{,}25^x+1)(0{,}25^x-1)\leqslant0$.
On vient de voir que, pour tout réel x, $0{,}25^x>0$, donc $0{,}25^x+1>0$.
D'autre part, on sait que la fonction exponentielle de base 0,25 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $0<0{,}25<1$, et que $0{,}25^0=1$. Donc pour tout $x<0$, $0{,}25^x>1$ et pour tout $x>0$, $0{,}25^x<1$.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$0{,}25^x+1$		$+$		$+$	
$0{,}25^x-1$		$+$	0	$-$	
$(0{,}25^x+1)(0{,}25^x-1)$		$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(0{,}25^x+1)(0{,}25^x-1)\leqslant 0$ est donc $S=[0;+\infty[$ ou $S=\mathbb{R}^+$.

Exercice 17 : a) $e^{3x-1}\leqslant e^{2x} \Leftrightarrow 3x-1\leqslant 2x$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x\leqslant 1$ $\boxed{S=]-\infty;1]}$

b) $e^{x+1}>1 \Leftrightarrow e^{x+1}>e^0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ $\boxed{S=]-1;+\infty[}$

c) $e^{x^2}>1 \Leftrightarrow e^{x^2}>e^0 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$ car pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$ avec $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

$\boxed{S=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[}$ ou encore $S=\mathbb{R}^*$

d) $e^{x^2}<e^4 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow x^2-2^2<0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)<0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S=]-2;2[}$.

e) $(e^x+1)(e^x-1)<0$.

Signe de e^x+1 : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$, donc $e^x+1>0$.

Signe de e^x-1 : D'après l'étude de la fonction exponentielle, on sait que $e^x<1$ lorsque $x<0$, que $e^x=1$ lorsque $x=0$ et que $e^x>1$ lorsque $x>0$. Donc $e^x-1<0 \Leftrightarrow x<0$.

On peut directement conclure que, d'après la règle des signes, $\boxed{S=]-\infty;0[}$.

Pour ceux et celles qui auraient du mal à se représenter directement ce résultat, j'établis le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x+1		$+$		$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$(e^x+1)(e^x-1)$		$-$	0	$+$	

f) $e^{2x}-e^{x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow e^{2x}\geqslant e^{x+1} \Leftrightarrow 2x\geqslant x+1 \Leftrightarrow x\geqslant 1$. $\boxed{S=[1;+\infty[}$

g) $e^{x^2}>e^{2x^2-x} \Leftrightarrow x^2>2x^2-x \Leftrightarrow 0>x^2-x \Leftrightarrow 0>x(x-1) \Leftrightarrow x(x-1)<0$. $S=]0;1[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

h) $e^{x-1}>\frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^{x-1}>e^{-x} \Leftrightarrow x-1>-x \Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ $\boxed{S=]\frac{1}{2};+\infty[}$