Terminale ES – Fonctions exponentielles – QCM – Corrigé

1) On sait que les fonctions exponentielles de bases q, $q>0$, sont définies sur $\mathbb{R}$.
En particulier, la fonction exponentielle de base 0,95, $x \mapsto 0{,}95^x$, est définie sur $\mathbb{R}$.
Cela signifie que $0{,}95^x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Et si $0{,}95^x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, $27\times 0{,}95^x$ aussi.
La fonction $x \mapsto 27\times 0{,}95^x$ est donc aussi, a priori, définie sur $\mathbb{R}$, sauf si on décide d'en restreindre l'étude sur une partie de $\mathbb{R}$, comme $]0;+\infty[$. La réponse a) ne semble donc pas convenir.

On a vu, d'après l'étude des fonctions exponentielles, que pour tout $q>0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $q^x>0$.
Donc, en particulier, pour $q=0{,}95$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0{,}95^x>0$.
Donc, d'après la règle des signes, comme $27>0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $27\times 0{,}95^x>0$.
L'énoncé propose en réponse b : « la fonction est toujours strictement positive », ce qui est un abus de langage dont la vraie formulation devrait être « l'image de n'importe quel réel par cette fonction est toujours strictement positive » ou à la rigueur « la fonction est à valeurs strictement positives ». C'est ce que nous venons de démontrer. Donc la réponse b) est vraie.

Testons la réponse c) : est-ce que, pour tout x , l'image de x par cette fonction est inférieure à 1 ?
Non, car, par exemple, l'image de 0 par cette fonction est $27\times 0{,}95^0=27\times 1=27\ >1$.

La réponse correcte est la réponse b).

2) Une augmentation de 4 % est à traduire par une multiplication par 1,04 (en effet : $1+4\,\%=1+\dfrac{4}{100}=1{,}04$).
Chaque semaine, la production de jus d'orange est multipliée par 1,04.
Au jour 0, elle est de $u_0=3000$. On note u_n la production, en litres, de jus d'orange n semaines après le jour 0.
(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=3000$ et de raison $1{,}04$.
Pour tout n , on a donc $u_n=3000\times 1{,}04^n$. Si on note x au lieu de n le nombre de semaines, on peut dire qu'après x semaines, la production de jus d'orange sera, en litres, de $\mathrm{P}(x)=3000\times 1{,}04^x$. Réponse c)
Les réponses a) et b) ne conviennent pas car elles ne permettent pas de calculer un pourcentage des 3000 L pour $x=1$.

3) Dans cette question, on suppose que la progression de la production est exponentielle et qu'elle répond à la formule $\mathrm{P}(x)=3000\times 1{,}04^x$ également pour des valeurs non entières de x .
Il s'agit ici de traduire 2 semaines et 3 jours en semaines. 2 semaines et 3 jours représentent 17 jours.
17 jours représentent $\dfrac{17}{7}$ de semaine. $\mathrm{P}\left(\dfrac{17}{7}\right)=3000\times 1{,}04^{\frac{17}{7}}\approx 3299{,}8$. On choisit la réponse b) : 3300 €

4) On développe et réduit les 3 expressions proposées pour savoir laquelle est égale (sous-entendu pour tout x) à $\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-4$.

Testons la réponse a) : $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+3-4)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\times 3-\mathrm{e}^x\times 4=\mathrm{e}^{2x}+3\,\mathrm{e}^x-4\,\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$. Ce n'est pas ça.

Testons la réponse b) : $(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+4)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x+4\,\mathrm{e}^x-1\,\mathrm{e}^x-4=\mathrm{e}^{2x}+3\,e^x-4$. OK

Testons la réponse c) : $\mathrm{e}^{2x+3x}-4=\mathrm{e}^{5x}-4$. Ce n'est pas ça. La réponse correcte est la réponse b)

5) Testons chacune des expressions proposées pour voir laquelle est égale, sous-entendu pour tout réel x , à $\dfrac{10\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
Tout d'abord, partons à la recherche d'éventuelles valeurs interdites :

$1+e^x=0 \Leftrightarrow e^x=-1$. Or, pour tout x réel, $e^x>0$, donc $e^x \neq 1$.

Il n'y a pas de valeur interdite, l'expression $\dfrac{10e^x}{1+e^x}$ est définie pour tout $x \in$ ℝ.

C'est aussi le cas des 3 expressions proposées : deux d'entre elles ont $1+e^x$ au dénominateur et sont donc aussi définies sur ℝ. Celle qui a $1+e^{-x}$ au dénominateur est aussi définie sur ℝ car, comme pour tout réel X, $e^X>0$, pour tout x ∈ ℝ, $-x \in$ ℝ donc $e^{-x}>0$, donc $1+e^{-x} \neq 0$.

Testons la réponse a) : soit $x \in$ ℝ, $\dfrac{10}{1+e^{-x}}=\dfrac{10\times e^x}{(1+e^{-x})\times e^x}$ (on a le droit de multiplier le numérateur et le dénominateur par e^x car on sait que c'est un nombre strictement positif, donc différent de 0)

Donc pour tout $x \in$ ℝ, $\dfrac{10}{1+e^{-x}}=\dfrac{10e^x}{e^x+e^x\times e^{-x}}=\dfrac{10e^x}{e^x+e^0}=\dfrac{10e^x}{e^x+1}$. La réponse a) convient.

Testons la réponse b) : $10-\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{10(1+e^x)-1}{1+e^x}=\dfrac{10+10e^x-1}{1+e^x}=\dfrac{9+10e^x}{1+e^x}$, ne convient pas.

Testons la réponse c) : $1-\dfrac{10}{1+e^x}=\dfrac{1+e^x-10}{1+e^x}=\dfrac{e^x-9}{1+e^x}$ ne convient pas.

La réponse correcte est la réponse a)

6) Résolvons l'équation $e^{1-x^2}=1$ dans ℝ.

$e^{1-x^2}=1 \Leftrightarrow e^{1-x^2}=e^0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow 1^2-x^2=0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x)=0 \Leftrightarrow 1+x=0$ ou $1-x=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $1=x$. $\boxed{S=\{-1;1\}}$.

L'équation admet 2 solutions dans ℝ. La réponse correcte est la réponse a)

7) Dans cette question, on s'intéresse au signe de $f(x)=(e^x+1)(e^{-x}-1)$.

Pour tout $x \in$ ℝ, $e^x>0$, donc $e^x+1>0$.

$f(x)$, d'après la règle des signes, est donc du signe de $e^{-x}-1$.

Or, $e^{-x}-1>0 \Leftrightarrow e^{-x}>1 \Leftrightarrow e^{-x}>e^0 \Leftrightarrow -x>0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ, donc elle conserve l'ordre. Donc $e^{-x}-1>0 \Leftrightarrow x<0$ (en multipliant les deux membres par -1).

On peut donc établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $e^{-x}-1$ et de $f(x)$		+	0	$-$	

Donc $f(x)$ est positif (ou nul) pour $x \in \left]-\infty;0\right]$. La réponse correcte est la réponse a).

8) Il s'agit de résoudre l'inéquation $e^{2x-1}<e^{x^2}$ non pas dans ℝ mais dans $[0;+\infty[$ (c'est-à-dire qu'on ne garde que les solutions positives ou nulles).

$e^{2x-1}<e^{x^2} \Leftrightarrow 2x-1<x^2$ car la fonction exponentielle est strictement croissante donc conserve l'ordre (sur ℝ et a fortiori sur [0;+∞[).

$e^{2x-1}<e^{x^2} \Leftrightarrow 0<x^2-2x+1 \Leftrightarrow 0<(x-1)^2$ car $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Or $(x-1)^2 \geqslant 0$ pour tout x , avec $(x-1)^2=0$ si et seulement si $x-1=0$ soit $x=1$.

Tous les réels positifs sauf 1 sont donc solutions de cette inéquation dans $[0;+\infty[$. $S=[0;1[\cup]1;+\infty[$.

La réponse correcte est la réponse c)

Si vous n'avez pas reconnu l'identité remarquable, vous pouviez calculer le discriminant Δ de x^2-2x+1, vous auriez trouvé 0 et déduit le signe du trinôme (du signe de 1(coefficient de x^2) en-dehors de sa racine-double 1 où il s'annule).

9) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)e^{-x}$. Calculons l'expression $f'(x)$ de sa dérivée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x)=u(x)\times v(x)}$ où $\boxed{u(x)=2x-1}$, $\boxed{u'(x)=2}$, et $\boxed{v(x)=e^{-x}}$.

Pour dériver v, remarquons que $\boxed{v(x)}$ est de la forme $\boxed{e^{U(x)}}$, avec $\boxed{U(x)=-x}$ donc $\boxed{U'(x)=-1}$.

Comme, d'après le cours, la dérivée d'une fonction de la forme e^u est $u'e^u$, on a $\boxed{v'(x)=-1\times e^{-x}=-e^{-x}}$.

On a donc $\boxed{f'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)}$, soit $f'(x)=2e^{-x}+(-e^{-x})\times(2x-1)$.
Soit $f'(x)=2e^{-x}-(2x-1)e^{-x}=(2-(2x-1))e^{-x}=(2-2x+1)e^{-x}$, soit $\boxed{f'(x)=(-2x+3)e^{-x}}$.

La réponse correcte est la réponse c)

10) Soit f la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=10-e^{-x^2}$.

On s'intéresse à son signe et à ses variations. On peut s'aider en faisant tracer sa courbe à la calculatrice, et ainsi conjecturer que la bonne réponse est la réponse b)

Pour tester la réponse a) calculons la dérivée de f sur $[-3;3]$.
$f(x)=10-e^{-x^2}=10-e^{u(x)}$ avec $u(x)=-x^2$ donc $u'(x)=-2x$.
Donc $\boxed{f'(x)=-u'(x)e^{u(x)}=2xe^{-x^2}}$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x>0$, on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2}>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $2x$.

x	-3		0		3
signe de $2x$ ou de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$f(-3)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(3)$

f admet donc un minimum et non un maximum en 0. La réponse a) ne convient pas.

Intéressons-nous maintenant au signe de $f(x)$.

Pour tout x $\in$ $[-3;3]$, $x^2\geqslant 0$ donc $-x^2\leqslant 0$.
On sait que e^X est compris dans l'intervalle $]0;1]$ lorsque $X\leqslant 0$ d'après l'étude de la fonction exponentielle (au besoin, revoir sa courbe). Donc pour tout $x \in [-3;3]$, $0<e^{-x^2}\leq 1$
donc $0>-e^{-x^2}\geqslant -1$ (en multipliant les 3 membres par -1)
donc $10>10-e^{-x^2}\geqslant 9$ (en ajoutant 10 aux trois membres)
Donc pour tout x de $[-3;3]$, $f(x)>0$ (puisque $f(x)\geqslant 9$)
La fonction f est à valeurs strictement positives dans $[-3;3]$.

La réponse correcte est donc la réponse b).