Terminale ES – Exercices de résolutions d'équations avec le logarithme népérien. Corrigés.

Exercice 1 : (E_1) $\boxed{e^{3x-1}=3}$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{3x-1})=\ln 3$ (on a le droit de composer par le logarithme car les deux membres sont strictement positifs) (E_1) $\Leftrightarrow$ $3x-1=\ln 3$ $\Leftrightarrow 3x=\ln 3+1$ $\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{\ln 3+1}{3}$. $\boxed{S=\{\dfrac{\ln 3+1}{3}\}}$

(E_2) $\boxed{e^{x-1}=2}$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{x-1})=\ln 2$ (Même remarque que ci-dessus) $\Leftrightarrow$ $x-1=\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $x=\ln 2+1$
$\boxed{S=\{\ln 2+1\}}$

(E_3) $\boxed{e^{-x}=2}$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{-x})=\ln 2$ (Même remarque que ci-dessus) $\Leftrightarrow$ $-x=\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $x=-\ln 2$ $\boxed{S=\{-\ln 2\}}$

(E_4) $\boxed{e^{\frac{1}{x}}=2}$ $\Leftrightarrow$ $\ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=\ln 2$ (Même remarque que ci-dessus) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{x}=\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{\ln 2}=x$ $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{\ln 2}\right\}}$

(E_5) $\boxed{e^{x}=\dfrac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{x})=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (Même remarque que ci-dessus) $\Leftrightarrow$ $x=\ln 1-\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $x=0-\ln 2$
$\Leftrightarrow$ $x=-\ln 2$ $\boxed{S=\{-\ln 2\}}$

(E_6) $\boxed{e^{3x}=\dfrac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{3x})=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (Même remarque que ci-dessus) $\Leftrightarrow$ $3x=-\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{-\ln 2}{3}$
$\boxed{S=\{-\dfrac{\ln 2}{3}\}}$

(E_7) $\boxed{e^{x}(e^{x}-2)=0}$ $\Leftrightarrow$ $e^{x}=0$ ou $e^{x}-2=0$
Remarque : l'équation $e^{x}=0$ n'a pas de solution car pour tout réel x , $e^{x}>0$.
Donc (E_7) $\Leftrightarrow$ $e^{x}-2=0$ $\Leftrightarrow$ $e^{x}=2$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{x})=\ln 2$ car les deux membres de l'équation sont strictement positifs. (E_7) $\Leftrightarrow$ $x=\ln 2$. $\boxed{S=\{\ln 2\}}$

(E_8) $\boxed{(e^{x}+3)(e^{x}-5)=0}$ $\Leftrightarrow$ $e^{x}+3=0$ ou $e^{x}-5=0$.
Or, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x}>0$ donc $e^{x}+3>3>0$. Donc l'équation $e^{x}+3=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc (E_8) $\Leftrightarrow$ $e^{x}-5=0$ $\Leftrightarrow$ $e^{x}=5$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{x})=\ln 5$ (On peut composer par ln car les deux membres sont strictement positifs), (E_8) $\Leftrightarrow$ $x=\ln 5$. $\boxed{S=\{\ln 5\}}$

(E_9) $\boxed{(e^{-x}-2)\left(e^{-x}-\dfrac{1}{2}\right)=0}$ $\Leftrightarrow$ $e^{-x}-2=0$ ou $e^{-x}-\dfrac{1}{2}=0$ $\Leftrightarrow$ $e^{-x}=2$ ou $e^{-x}=\dfrac{1}{2}$.
On peut composer les membres de ces deux équations par la fonction ln car tous ces membres sont strictement positifs.
(E_9) $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{-x})=\ln 2$ ou $\ln(e^{-x})=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\Leftrightarrow$ $-x=\ln 2$ ou $-x=-\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $x=-\ln 2$ ou $x=\ln 2$.
$\boxed{S=\{-\ln 2;\ln 2\}}$

(E_{10}) $\boxed{(e^{3x}-1)^2=4}$ $\Leftrightarrow$ $(e^{3x}-1)^2-4=0$ $\Leftrightarrow$ $(e^{3x}-1)^2-2^2=0$ $\Leftrightarrow$ $(e^{3x}-1-2)(e^{3x}-1+2)=0$
(E_{10}) $\Leftrightarrow$ $(e^{3x}-3)(e^{3x}+1)=0$ $\Leftrightarrow$ $e^{3x}-3=0$ ou $e^{3x}+1=0$.
Or pour tout réel x , $e^{3x}>0$ donc $e^{3x}+1>1$ donc $e^{3x}+1\neq 0$. Donc (E_{10}) $\Leftrightarrow$ $e^{3x}-3=0$ $\Leftrightarrow$ $e^{3x}=3$.
Comme les deux membres de cette équation sont strictement positifs, on peut composer par la fonction ln :
(E_{10}) $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{3x})=\ln 3$ $\Leftrightarrow$ $3x=\ln 3$ $\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{\ln 3}{3}$. $\boxed{S=\left\{\dfrac{\ln 3}{3}\right\}}$.

Autre résolution possible pour (E_{10}):

(E_{10}) $\boxed{(e^{3x}-1)^2=4}$ $\Leftrightarrow$ $e^{3x}-1=2$ ou $e^{3x}-1=-2$ $\Leftrightarrow$ $e^{3x}=3$ ou $e^{3x}=-1$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{3x}>0$ donc $e^{3x}\neq-1$.
Donc (E_{10}) $\Leftrightarrow$ $e^{3x}=3$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{3x})=\ln 3$ (On peut composer par ln car les deux membres sont strictement positifs), donc (E_{10}) $3x=\ln 3$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x=\dfrac{\ln 3}{3}}$.

(E_{11}) $\boxed{e^{x^2-3}=2}$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{x^2-3})=\ln 2$ (On peut composer par ln car les deux membres sont strictement positifs)
(E_{11}) $\Leftrightarrow$ $x^2-3=\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $x^2=\ln 2+3$ $\Leftrightarrow$ $x=\sqrt{\ln 2+3}$ ou $x=-\sqrt{\ln 2+3}$. $\boxed{S=\{-\sqrt{\ln 2+3};\sqrt{\ln 2+3}\}}$

(E_{12}) $e^{x^2-3}=-2$ $\boxed{S=\emptyset}$. L'équation n'a pas de solution car pour tout réel x , $e^{x^2-3}>0$, donc $e^{x^2-3}\neq-2$.

(E_{13}) $\boxed{e^{2x}-2e^{-2x}=1}$ $\Leftrightarrow$ $e^{2x}-\dfrac{2}{e^{2x}}=1$. On pose $X=e^{2x}$ et on résout donc, pour $X>0$, $X-\dfrac{2}{X}=1$ (E'_{13}) .
(E'_{13}) $\Leftrightarrow$ $X-1-\dfrac{2}{X}=0$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{X^2-X-2}{X}=0$.
Considérons le trinôme X^2-X-2 . $\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9=3^2$.
Donc ce trinôme a deux racines : $X_1=\dfrac{-(-1)-3}{2}=-1$ et $X_2=\dfrac{-(-1)+3}{2}=2$.
Seule X_2 est strictement positive.
Donc (E_{13}) $\Leftrightarrow$ $e^{2x}=2$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{2x})=\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $2x=\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{\ln 2}{2}$. $\boxed{S=\left\{\dfrac{\ln 2}{2}\right\}}$

(E_{14}) $(e^x-1)^2=1$ $\Leftrightarrow$ $(e^x-1)^2-1^2=0$ $\Leftrightarrow$ $(e^x-1-1)(e^x-1+1)=0$ $\Leftrightarrow$ $(e^x-2)e^x=0$
(E_{14}) $\Leftrightarrow$ $e^x-2=0$ ou $e^x=0$ $\Leftrightarrow$ $e^x-2=0$ car pour tout réel x, $e^x>0$ donc $e^x\neq0$.
(E_{14}) $\Leftrightarrow$ $e^x=2$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^x)=\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $x=\ln 2$. $\boxed{S=\{\ln 2\}}$

On peut aussi résoudre comme suit : (E_{14}) $\Leftrightarrow$ $e^x-1=\sqrt{1}$ ou $e^x-1=-\sqrt{1}$ ...

Exercice 2 : a) (E) $5x^2-13x-6=0$ $\Delta=(-13)^2-4\times5\times(-6)=169+120=289=17^2$
(E) a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{13-17}{10}=-0{,}4$ et $x_2=\dfrac{13+17}{10}=3$. $\boxed{S=\{-0{,}4;3\}}$.

b) (E') $5e^{4x}-13e^{2x}-6=0$. En posant $X=e^{2x}$, l'équation (E') s'écrit $5X^2-13X-6=0$.
(Petite précision si besoin : $e^{4x}=(e^{2x})^2$)

On sait que cette dernière équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $-0{,}4$ et 3.
Or il ne s'agit pas de la résoudre dans $\mathbb{R}$ mais dans $\mathbb{R}^{+*}$, car pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{2x}>0$.
On ne garde donc que la solution $X=3$.
On résout donc $e^{2x}=3$ $\Leftrightarrow$ $\ln(e^{2x})=\ln 3$ $\Leftrightarrow$ $2x=\ln 3$ $\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{\ln 3}{2}$. $\boxed{S=\left\{\dfrac{\ln 3}{2}\right\}}$.

Exercice 3 : (E_1) $\boxed{\ln(1+3x)=\ln(x+1)}$
(E_1) est définie pour $1+3x>0$ et $x+1>0$ $\Leftrightarrow$ $3x>-1$ et $x>-1$ $\Leftrightarrow$ $x>-\dfrac{1}{3}$ et $x>-1$ $\Leftrightarrow$ $x>-\dfrac{1}{3}$ car $-\dfrac{1}{3}>-1$. On résout donc (E_1) dans $\boxed{\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[}$.

$(E_1) \Leftrightarrow \ 1+3x=x+1 \ \Leftrightarrow \ 2x=0 \ \Leftrightarrow \ x=0$. Comme $0 \in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $\boxed{S=\{0\}}$.

(E_2) $\boxed{\ln(2x+1)=\ln(x^2-1)}$. (E_2) est définie lorsque $2x+1>0$ et $x^2-1>0$.

$2x+1>0 \Leftrightarrow \ 2x>-1 \ \Leftrightarrow \ x>-\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2-1>0 \ \Leftrightarrow x \in \ ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

$(]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[)\cap\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[= \boxed{]1;+\infty[}$

On résout donc l'équation (E_2) dans $]1;+\infty[$.

(E_2) $\ln(2x+1)=\ln(x^2-1) \ \Leftrightarrow \ 2x+1=x^2-1 \ \Leftrightarrow \ 0=x^2-2x-2$.

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-2)=4+8=12=(2\sqrt{3})^2$

Le trinôme x^2-2x-2 admet donc deux racines dans $\mathbb{R}$: $x_1=\frac{2-2\sqrt{2}}{3}=1-\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$.

Mais $1-\sqrt{3}\notin]1;+\infty[$, donc $\boxed{S=\{1+\sqrt{3}\}}$.

(E_3) $\boxed{\ln(x-3)-1=0}$. (E_3) est définie pour $x-3>0 \ \Leftrightarrow \ x>3 \ \Leftrightarrow x\in$ $\boxed{]3;+\infty[}$.

On résout donc (E_3) dans $]3;+\infty[$.

$(E_3) \ \Leftrightarrow \ \ln(x-3)=1 \ \Leftrightarrow \ e^{\ln(x-3)}=e^1 \ \Leftrightarrow \ x-3=e \ \Leftrightarrow \ x=e+3$.

$e>0$ donc $e+3>3$ donc $e+3 \in \ ]3;+\infty[$. Donc $\boxed{S=\{e+3\}}$.

(E_4) $\boxed{\ln(x)+\ln(x-1)=0}$ (E_4) est définie pour $x>0$ et $x-1>0 \ \Leftrightarrow \ x>0$ et $x>1$ soit pour $x>1$.

On résout donc (E_4) dans $\boxed{]1;+\infty[}$. $(E_4) \ \Leftrightarrow \ \ln(x(x-1))=0 \ \Leftrightarrow \ \ln(x(x-1))=\ln 1 \ \Leftrightarrow \ x(x-1)=1$.

$(E_4) \ \Leftrightarrow \ x^2-x-1=0$. $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$.

Le trinôme x^2-x-1 admet donc deux racines dans $\mathbb{R}$: $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Seul x_2 est dans $]1;+\infty[$. Donc $\boxed{S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

(E_5) $\boxed{\ln(4-x)=0}$ (E_5) est définie pour $4-x>0 \ \Leftrightarrow \ 4>x \ \Leftrightarrow x\in \ ]-\infty;4[$.

On résout donc (E_5) dans $\boxed{]-\infty;4[}$. $(E_5) \Leftrightarrow \ \ln(4-x)=\ln 1 \ \Leftrightarrow \ 4-x=1 \ \Leftrightarrow \ 3=x$.

$3\in]-\infty;4[$, donc $\boxed{S=\{3\}}$.

(E_6) $\boxed{\ln(x)-\ln(1-x)=\ln(2)}$

(E_6) est définie pour $x>0$ et $1-x>0$, soit pour $x>0$ et $1>x$. Donc (E_6) est définie pour $x\in\ ]0;1[$.

On résout (E_6) dans $\boxed{]0;1[}$.

$(E_6) \Leftrightarrow \ln(x)-\ln(1-x)-\ln 2=0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{2(1-x)}=0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{2(1-x)}=\ln 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2(1-x)}=1$

(On remarque que si $x\in\ ]0;1[$, nécessairement $1-x\neq 0$)

$(E_6) \Leftrightarrow x=2(1-x) \Leftrightarrow x=2-2x \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$. Comme $\dfrac{2}{3}\in\ ]0;1[$, $\boxed{S=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$.

(E_7) $\boxed{\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)}$

(E_7) est définie pour $2x+1>0$ et $x-3>0$ et $x+5>0$

Soit pour $2x>-1$ et $x>3$ et $x>-5$, soit pour $x>-\dfrac{1}{2}$ et $x>3$ et $x>-5$, donc pour $x\in\ ]3;+\infty[$.

On résout (E_7) dans $\boxed{]3;+\infty[}$.

$(E_7) \Leftrightarrow \ln((2x+1)(x-3))=\ln(x+5) \Leftrightarrow (2x+1)(x-3)=x+5 \Leftrightarrow 2x^2-6x+x-3=x+5$

$(E_7) \Leftrightarrow 2x^2-6x-8=0 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$. $\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25=5^2$

Le trinôme x^2-3x-4 admet donc deux racines dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{3-5}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{3+5}{2}=4$.

Seule x_2 est dans $]3;+\infty[$, donc $\boxed{S=\{4\}}$.

(E_8) $\boxed{\ln(x-1)+\ln(2-x)=\ln(6x)}$

(E_8) est définie pour $x-1>0$ et $2-x>0$ et $6x>0$

Soit pour $x>1$ et $2>x$ et $x>0$, soit pour $x\in\ ]1;2[$.

On résout (E_8) dans $\boxed{]1;2[}$.

$(E_8) \Leftrightarrow \ln[(x-1)(2-x)]=\ln(6x) \Leftrightarrow (x-1)(2-x)=6x \Leftrightarrow 2x-x^2-2+x=6x \Leftrightarrow 0=x^2+3x+2$

$\Delta=3^2-4\times1\times2=9-8=1=1^2$.

Le trinôme x^2+3x+2 admet donc deux racines : $x_1=\dfrac{-3-1}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{-3+1}{2}=-1$.

Mais ni -2, ni -1 n'appartiennent à l'intervalle $]1;2[$. Donc l'équation (E_8) n'a pas de solution. $\boxed{S=\emptyset}$.

Exercice 4 : 1) $\boxed{x^2-2x-3=0}$ $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=4+12=16=4^2$.

L'équation $x^2-2x-3=0$ admet donc deux solutions : $x_1=\dfrac{2-4}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{2+4}{2}=3$. $\boxed{S=\{-1;3\}}$.

2) a) L'équation $\boxed{\ln(x-2)+\ln x=\ln 3}$ n'est définie que pour $x-2>0$ et $x>0$, soit $x>2$ et $x>1$, soit $x>2$. Donc -1 ne peut pas être solution de cette équation.

3 l'est-elle ? Calculons $\ln(3-2)+\ln 3=\ln 1+\ln 3=0+\ln 3=\ln 3$.

3 est solution de l'équation $\ln(x-2)+\ln x=\ln 3$.

b) L'équation $\boxed{\ln[x(x-2)]=\ln 3}$ est définie pour $x(x-2)>0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'équation $\ln[x(x-2)]=\ln 3$ est donc définie pour $x\in\ ]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.
-1 et 3 appartiennent à cet ensemble.

$\ln(-1(-1-2))=\ln(-1\times(-3))=\ln 3$. Donc -1 est solution de l'équation $\ln[x(x-2)]=\ln 3$.
$\ln(3\times(3-2))=\ln(3\times 1)=\ln 3$. Donc 3 est solution de l'équation $\ln[x(x-2)]=\ln 3$.

-1 et 3 sont tous deux solution de l'équation $\ln[x(x-2)]=\ln 3$.

Exercice 5 : (E_1) $\boxed{\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)}$

(E_1) est définie pour $x+3>0$ et $x+2>0$ et $x+11>0$, soit pour $x>-3$ et $x>-2$ et $x>-11$, soit pour $x>-2$. (E_1) est définie sur $\boxed{]-2;+\infty[}$. On résout donc (E_1) dans $]-2;+\infty[$:

$(E_1)\ \Leftrightarrow\ \ln[(x+3)(x+2)]=\ln(x+11)\ \Leftrightarrow\ (x+3)(x+2)=x+11\ \Leftrightarrow\ x^2+5x+6=x+11$
$(E_1)\ \Leftrightarrow\ x^2+4x-5=0$. $\quad \Delta=4^2-4\times 1\times(-5)=16+20=36=6^2$
Le trinôme x^2+4x-5 admet donc deux racines dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-4-6}{2}=-5$ et $x_2=\dfrac{-4+6}{2}=1$.
Seule 1 appartient à l'intervalle $]-2;+\infty[$, donc $\boxed{S=\{1\}}$.

(E'_1) $\boxed{\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)}$. Cette équation est définie lorsque $x^2+5x+6>0$ et lorsque $x>-11$.

Résolvons l'inéquation $x^2+5x+6>0$. $\quad \Delta=5^2-4\times 1\times 6=25-24=1=1^2$
Le trinôme x^2+5x+6 admet donc deux racines : $x_3=\dfrac{-5-1}{2}=-3$ et $x_4=\dfrac{-5+1}{2}=-2$.
Le coefficient de x^2 dans ce trinôme étant $1>0$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
x^2+5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble de définition de l'équation (E'_1) est donc $]-11;+\infty[\ \cap(\ ]-\infty;-3[\cup]-2;+\infty[\ )$, c'est-à-dire $]-11;-3[\cup]-2;+\infty[$.

On résout (E'_1) dans $\boxed{]-11;-3[\cup]-2;+\infty[}$:
$(E'_1)\ \Leftrightarrow\ x^2+5x+6=x+11\ \Leftrightarrow\ x^2+4x-5=0\ \Leftrightarrow\ x=-5$ ou $x=1$. (Voir résolution de (E_1))

Ici, on peut garder les deux racines, -5 et 1, car elles appartiennent toutes deux à l'ensemble de résolution $]-11;-3[\cup]-2;+\infty[$. $\boxed{S=\{-5;1\}}$.

Exercice 6 : 1) $\boxed{2x^2+3x-2=0}$. $\quad \Delta=3^2-4\times 2\times(-2)=9+16=25=5^2$.
L'équation $2x^3+3x-2=0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-3-5}{4}=-2$ et $x_2=\dfrac{-3+5}{4}=\dfrac{1}{2}$. $\quad \boxed{S=\left\{-2;\dfrac{1}{2}\right\}}$

2) (E_2) $\boxed{2(\ln x)^2+3\ln x-2=0}$.

En posant $X=\ln x$, résoudre (E_2) (dans $]0;+\infty[$)revient à résoudre (E'_2) $2X^2+3X-2=0$ dans $\mathbb{R}$. (Car lorsque x parcourt $]0;+\infty[$, $\ln x$ parcourt $\mathbb{R}$)

Or on a vu au 1) que (E'_2) admet deux solutions : $X=-2$ et $X=\dfrac{1}{2}$.

Résoudre (E_2) revient donc à résoudre dans $]0;+\infty[$ $\ln x=-2$ ou $\ln x=\dfrac{1}{2}$.

$\ln x=-2 \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{-2} \Leftrightarrow x=e^{-2}$

$\ln x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$

Ces deux valeurs sont bien dans $]0;+\infty[$, donc l'ensemble des solutions de (E_2) est $\boxed{S=\left\{e^{-2};e^{\frac{1}{2}}\right\}}$.

Exercice 7 : (E_1) $\boxed{\ln(x^2)=(\ln x)^2}$ On résout dans $\boxed{]0;+\infty[}$. $(E_1) \Leftrightarrow 2\ln(x)=(\ln x)^2$.

En posant $X=\ln x$, résoudre (E_1) dans $]0;+\infty[$ revient à résoudre $2X=X^2$ dans $\mathbb{R}$ (Car lorsque x parcourt $]0;+\infty[$, $\ln x$ parcourt $\mathbb{R}$)

$2X=X^2 \Leftrightarrow 0=X^2-2X \Leftrightarrow 0=X(X-2) \Leftrightarrow X=0$ ou $X-2=0 \Leftrightarrow X=0$ ou $X=2$.

Donc $(E_1) \Leftrightarrow \ln x=0$ ou $\ln x=2 \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^0$ ou $e^{\ln x}=e^2 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=e^2$. $\boxed{S=\{1;e^2\}}$

(E_2) $\boxed{e^{2x}-2e^x=0}$. On pose $X=e^x$. Résoudre (E_2) dans $\mathbb{R}$ revient à résoudre $X^2-2X=0$ dans $]0;+\infty[$, car lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, e^x parcourt $]0;+\infty[$.

On a vu que, dans $\mathbb{R}$, $X^2-2X=0 \Leftrightarrow X=0$ ou $X=2$.
0 n'appartient pas à $]0;+\infty[$. Donc on garde seulement la solution $X=2$.

On a donc $(E_2) \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$. $\boxed{S=\{\ln 2\}}$

Exercice 8 : (S_1) $\boxed{\begin{cases}3X-3Y=3\\3X-2Y=7\end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases}X-Y=1\\3X-2Y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X=1+Y\\3(1+Y)-2Y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X=1+Y\\3+3Y-2Y=7\end{cases}$

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases}X=1+Y\\Y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X=5\\Y=4\end{cases}$. $\boxed{S=\{(5;4)\}}$.

(S'_1) $\boxed{\begin{cases}2e^x-3e^y=3\\3e^x-2e^y=7\end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases}e^x=5\\e^y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\ln 5\\y=\ln 4\end{cases}$ $\boxed{S=\{\ln 5;\ln 4\}}$ ou $\boxed{S=\{\ln 5;2\ln 2\}}$

(S_2) $\boxed{\begin{cases}2X=Y+1\\3X+3=2Y\end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases}2X-1=Y\\3X+3=2(2X-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Y=2X-1\\3X+3=4X-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Y=2X-1\\5=X\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Y=9\\X=5\end{cases}$

$\boxed{S=\{(5;9)\}}$

(S'_2) $\boxed{\begin{cases}2e^{-x}=e^y+1\\3e^{-x}+3=2e^y\end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases}e^{-x}=5\\e^y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x=\ln 5\\y=\ln 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\ln 5\\y=2\ln 3\end{cases}$ $\boxed{S=\{(-\ln 5;2\ln 3)\}}$

(S_3) $\begin{cases}\ln x+\ln 4=\ln 3-\ln y\\e^x=e^{2-y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln(4x)=\ln\left(\dfrac{3}{y}\right)\\x=2-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4(2-y)=\dfrac{3}{y}\\x=2-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4y(2-y)=3\\x=2-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8y-4y^2=3\\x=2-y\end{cases}$

(on résout pour $x>0$ et $y>0$) $8y-4y^2=3 \Leftrightarrow 0=4y^2-8y+3 \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$ ou $y=\dfrac{1}{2}$. Si $y=\dfrac{3}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$

et si $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$. Dans les deux cas, on a bien $x>0$ et $y>2$. Donc $\boxed{S=\left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right);\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}}$.