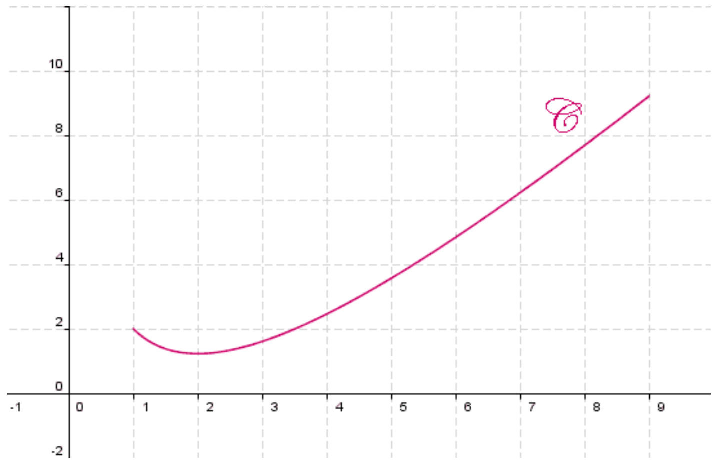
Problème 1 : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;9]$ par $f(x)=2x-4\ln(x)$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.



1) En utilisant le graphique ci-contre, conjecturer la convexité de f sur $[1;9]$.

2) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
b) En déduire les variations de f sur $[1;9]$.

On précisera les valeurs exactes de la fonction aux bornes de l'ensemble de définition.

3) a) Justifier que, pour tout réel x de $[1;9]$, la dérivée seconde de f en x est $f''(x)=\dfrac{4}{x^2}$.
b) En déduire la convexité de la fonction f sur $[1;9]$.

4) a) On désigne par T la tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse e . Déterminer une équation de la droite T.
b) En utilisant un résultat précédent, préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Problème 2 : On considère la fonction définie sur $[0{,}5;8]$ par $f(x)=(\ln x)(2-\ln x)$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) a) Prouver que la dérivée f' de f sur $[0{,}5;8]$ a pour expression $f'(x)=\dfrac{-2(\ln x-1)}{x}$.
b) Résoudre l'inéquation $\ln x-1\geqslant 0$
c) En déduire le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de f sur $[0{,}5;8]$. Dans ce tableau, donner les valeurs aux bornes arrondies à 10^{-2} près.

2) Résoudre l'équation $f(x)=0$ dans $[0{,}5;8]$. On donnera la valeur exacte de chaque solution. En donner une interprétation graphique.

3) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1.

Problème 3 : La fonction f est définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}};\mathrm{e}\right]$ par $f(x)=x^2\ln x$.

1) Montrer que, pour tout réel x de I, on a $f'(x)=x(2\ln x+1)$.

2) a) Résoudre dans I l'inéquation $2\ln x+1\geqslant 0$.
b) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur I.

3) a) Calculer les valeurs exactes de $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ et $f(\mathrm{e})$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Problème 4 : f est une fonction définie sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$ par $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{x}\ln x$, où a et b sont deux réels.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$A(1;0)$ est un point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y=3x+2$.

1) Calculer, pour tout x de I, $f'(x)$.

2) a) Pourquoi a-t-on $f'(1)=3$? En déduire que $a+1=3$.
b) Prouver que $a+b=0$

3) En déduire l'expression de $f(x)$.

Problème 5 : 1) g est la fonction définie sur ℝ par $g(x)=x\mathrm{e}^{x}+1$.
a) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.
b) Calculer $g(-1)$ et déduisez-en que pour tout x de ℝ, $g(x)\geqslant 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\ln x$.
a) Démontrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.
b) En déduire le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

Problème 6 : Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x)=ax+\dfrac{b}{\ln x}$.
Déterminer les réels a et b pour que la représentation graphique (Γ) de g dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ coupe l'axe $(O;\vec{i})$ au point E d'abscisse e et que la tangente à (Γ) en E soit parallèle à la droite (D) d'équation $y=2x$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\mathrm{e}}{\ln x}$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1) a) Soit f' la dérivée de la fonction f sur $]1;+\infty[$. Donner l'expression de $f'(x)$.
b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations sur $]1;+\infty[$.

2) Donner une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse e.

3) Construire dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ les droites (D) et (T) et la courbe $\mathscr{C}$.

Problème 7 : Partie A : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2+4-8\ln x$.

1) Déterminer la dérivée de f.

2) Dresser le tableau de variations de f. Déterminer le signe de f sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Le cours d'une action cotée en bourse, exprimée en dizaines d'euros, est égal à $f(x)$, où x représente le nombre de mois écoulés à partir du 1er décembre 2011.

1) Un investisseur décide d'acheter 2 500 actions de ce type. En quel mois de l'année 2012 est-il le plus judicieux pour lui d'acheter ?

2) Calculer sa dépense arrondie à l'euro.