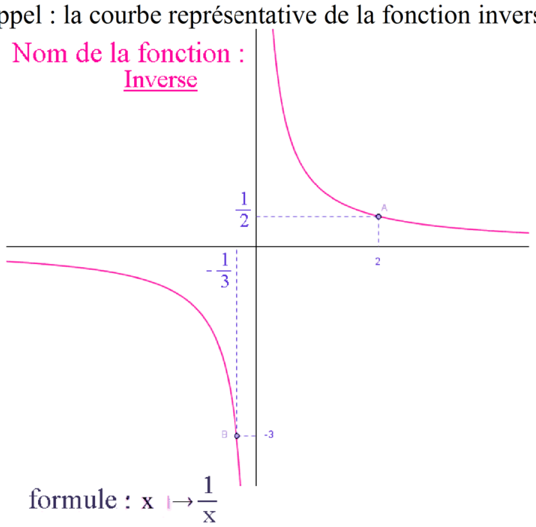
Les règles essentielles sur l'ordre. (pour les classes de terminales)

Que vous ayez à résoudre une équation ou un inéquation, à encadrer un nombre ou les termes d'une suite, pour trouver une limite par exemple, il est essentiel que vous connaissiez parfaitement les 7 règles sur l'ordre (surtout les 5 premières) et que vous soyez conscient(e)s à chaque étape de votre raisonnement de laquelle vous êtes en train d'appliquer.

Cette fiche est proposée avec des inégalités strictes (<, >), mais les mêmes règles sont valables avec des inégalités larges (⩽, ⩾) , et elles sont transposables à des égalités, mais dans ce dernier cas, on n'a plus à se demander si on conserve l'ordre ou si on le change.

Règle	Exemples d'applications
Règle 1 : additionner ou soustraire un même nombre aux membres d'une inégalité conserve l'ordre. Pour tous réels a, b et c, $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$ et $a<b \Leftrightarrow a-c<b-c$	Ex1 : Pour résoudre une inéquation. $e^{4x+1}-1<0 \Leftrightarrow e^{4x+1}<1$ (en additionnant 1 aux deux membres) $2x+5>5x-3 \Leftrightarrow -3x>-8$ (en soustrayant $5x$ et 5 aux deux membres) Ex2 : on veut encadrer 3x+7 et on sait que $-2<3x<3$. $-2<3x<3 \Leftrightarrow 5<3x+7<10$ en additionnant 7 aux trois membres.
Règle 2 : multiplier ou diviser les membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif conserve l'ordre. Pour tous réels a et b et pour tout c>0 : $a<b \Leftrightarrow ac<bc$ $a<b \Leftrightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$	Ex3 : En résolvant une inéquation : $7x<-3 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{7}$ en divisant les deux membres par 7. Ex4 : on veut encadrer $\frac{3x+7}{9}$ sachant que $5<3x+7<10$ $5<3x+7<10 \Leftrightarrow \frac{5}{9}<\frac{3x+7}{9}<\frac{10}{9}$ Ex5 : on veut connaître le signe de $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$. On sait que pour $x<-\frac{1}{2}$, $2x+1<0$. On multiplie alors les deux membres par e^{-x} dont on sait qu'il est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a (pour tout $x<-\frac{1}{2}$) : $2x+1<0 \Leftrightarrow (2x+1)e^{-x}<0$ $\Leftrightarrow f'(x)<0$.
Règle 3 : Multiplier ou diviser les membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif inverse l'ordre. Pour tous réels a et b, et pour tout c<0 : $a<b \Leftrightarrow ac>bc$ $a<b \Leftrightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ ⚠ Il est très important de savoir ce que vous faites à chaque étape de calcul, si le nombre par lequel vous multipliez ou divisez est positif, négatif et s'il peut s'annuler. S'il peut s'annuler, vous n'avez pas le droit d'effectuer l'opération !	Ex6 : En résolvant une inéquation : $\frac{10x-3}{-7}<5 \Leftrightarrow 10x-3>-35$ en multipliant les deux membres par -7 . $-10x>2 \Leftrightarrow x<-0{,}2$ en divisant les deux membres par -10. Ex7 : imaginons qu'on se situe dans l'intervalle $]-\infty;-1[$ où x+1 est strictement négatif : $\frac{2x}{x+1}>3 \Leftrightarrow 2x<3(x+1)$ en multipliant les deux membres par $x+1$ dont on sait qu'il est strictement négatif car $x<-1$. Attention, l'ordre ne changera pas si $x>-1$! Ex 8 : x est dans l'intervalle]0;1[donc on sait que $\ln(x)<0$. $\frac{2x+1}{\ln(x)}>3 \Leftrightarrow 2x+1<3\ln(x)$

Règle	Exemples d'applications
Règle 4 : composer (ou décomposer) une inégalité par une fonction strictement croissante conserve l'ordre. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle[1] I. Pour tous a et b de I : $a<b \Leftrightarrow f(a)<f(b)$ Il est donc important que vous ayez « photographié » mentalement les courbes des fonctions usuelles, pour savoir notamment sur quels intervalles elles sont croissantes et sur lesquels elles sont décroissantes. Si vous avez oublié les variations d'une fonction usuelle, faites tracer sa courbe par la calculatrice.	Ex9 : Les règles dans le cours sur le logarithme et l'exponentielle viennent de là : Pour tous réels a et b, $a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ. Pour tous a et b de $]0;+\infty[$, $a<b \Leftrightarrow \ln a<\ln b$ Car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Et aussi : Pour tous a et b de $[0;+\infty[$, $a<b \Leftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ Ex10 : on est en train de résoudre une inéquation : $e^{4x+1}<1 \Leftrightarrow e^{4x+1}<e^0 \Leftrightarrow 4x+1<0$ en « décomposant » les deux membres par la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur ℝ.
Règle 5 : composer (ou décomposer) une inégalité par une fonction strictement décroissante inverse l'ordre. Soit f une fonction strictement décroissante sur un intervalle[1] I. Pour tous a et b de I : $a<b \Leftrightarrow f(a)>f(b)$ Rappel : la courbe représentative de la fonction inverse :  La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ d'une part, et sur $]0;+\infty[$ d'autre part.	Ex 11 : On sait que $-4<2x-3<-1$ et on veut encadrer $(2x-3)^2$. $-4<2x-3<-1 \Leftrightarrow 16>(2x-3)^2>1$ en composant par la fonction carré qui est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ dans lequel les 3 membres de l'encadrement de départ sont compris car le plus grand est -1 . Ex12 : On sait que $-2<x<5$ et on veut encadrer $g(x)=\frac{1}{2x+7}$ *(même principe avec $-2<u_n<5$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2u_n+7}$ dans un problème de suites, par exemple : en S, vous avez souvent besoin de montrer qu'une suite est majorée ou minorée, donc que pour tout n, u_n est inférieur ou supérieur à un réel fixé.) :* $-2<x<5 \Leftrightarrow -4<2x<10 \Leftrightarrow 3<2x+7<17$. Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et que les trois membres sont bien dans cet intervalle, on peut écrire : $\frac{1}{3}>\frac{1}{2x+7}>\frac{1}{17}$. Ex13 : pour les terminale ES. On souhaite comparer $0{,}3^{12}$ et $0{,}3^{14}$. On sait que la fonction $x \mapsto 0{,}3^x$ est strictement décroissante sur ℝ car $0<0{,}3<1$. Donc $12<14 \Leftrightarrow 0{,}3^{12}>0{,}3^{14}$.
Règle 6 : On peut additionner membre à membre des inégalités de même sens. (mais pas les soustraire!) Si $a<b$ et $c<d$, alors $a+c<b+d$.	Ex14 : Si $e^{-x}>0$ et $2x+3>5$ (si on est sur $]1;+\infty[$ par exemple), alors $e^{-x}+2x+3>5(+0)$.
Règle 7 : on peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens si tous les membres sont positifs. Si $0\leqslant a<b$ et $0\leqslant c<d$, alors $(0\leqslant)$ $ac<bd$	Ex15 : On sait que si $2<x<5$ alors $\ln 2<\ln x<\ln 5$ d'après la règle 4. Si on veut encadrer $f(x)=x\ln x$ sur l'intervalle]2;5[, on peut multiplier membre à membre les deux encadrements de la première ligne. On obtient : $2\ln 2<x\ln x<5\ln 5$

1 Il est primordial qu'il s'agisse d'un intervalle, qu'il n'y ait pas de « trou », d'interruption de la croissance ou de la décroissance de la fonction.